

位相入門 試験問題 Jan. 22, 2026 (中野 伸)

距離空間 (X, d) において, $p \in X$ および $\varepsilon > 0$ に対して, p の ε -近傍とは $U(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}$ で与えられる X の部分集合であった.
以下では, 必要に応じてこれを自由に使ってよい.

[1] 以下の問いに答えよ.

- (1) 距離空間の定義を述べよ.
- (2) 集合 X 上の距離 d_1, d_2 に対して, $D(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ ($x, y \in X$) と定めるとき, D は X 上の距離であることを示せ.
- (3) 【前問のつづき】 d_1, d_2 が同じ位相を定めるならば, D もそれらと同じ位相を定めることを示せ.

[2] (X, d) を距離空間とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $p \in X$, $U \subset X$ とする. U が p の近傍であることの定義を述べよ. また, U が開集合であることの定義を述べよ.
- (2) X として, ユークリッド距離空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}$ を考える. $k = 0, 2$ のそれぞれについて, X において $\{k\}$ が k の近傍かどうか, 理由をつけて答えよ.
- (3) 【前問のつづき】 X において $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ は開集合であることを示し, その閉包を求めよ.

[3] (X, d) を距離空間とし, A をその部分集合とするととき, 以下の問いに答えよ.

- (1) A が点列コンパクトであることの定義を述べよ.
- (2) A が点列コンパクトならば, 任意の $p \in X$ について, 集合 $A \cup \{p\}$ も点列コンパクトであることを示せ.
- (3) $X = \mathbb{R}$ (ユークリッド距離空間), $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ の場合, A は点列コンパクトではない. これを点列コンパクトの定義から直接証明せよ.

[4] 2次元ユークリッド距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 原点を O とし, 点 $(-1, 0)$, $(1, 0)$ を中心とする半径1の円板をそれぞれ D_1, D_2 とする;

$$D_1 = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A = (D_1 \cup D_2) \setminus \{O\}$ について, 以下の問いに理由をつけて答えよ.

- (1) A は $\mathbb{R}^2$ の開集合か, 閉集合か, どちらでもないか.
- (2) O は A の集積点かどうか.
- (3) A は連結かどうか.