

位相入門

2025 年度版

中野 伸

(学習院大学・理学部・数学科)

目次

§1.	ユークリッド空間の位相	1
§2.	距離空間	3
§3.	点列の収束	5
§4.	連続写像	8
§5.	部分空間と直積空間	11
§6.	近傍, 開集合	15
§7.	閉集合, 内部, 閉包	19
§8.	集積点, 稠密性	23
§9.	点列コンパクト性	27
§10.	コンパクト性	31
§11.	点列コンパクトとコンパクトの同値性	35
§12.	完備性	39
§13.	連結性	43

§1. ユークリッド空間の位相

$\mathbb{R}$ は実数直線, $\mathbb{R}^2$ は平面, $\mathbb{R}^3$ は空間であるが, これを一般化して

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

を n 次元ユークリッド空間と呼ぶ. 集合を幾何学的な対象とみなすとき, その集合の元を点と呼ぶ習慣がある. この講義でもそれに倣い, $\mathbb{R}^n$ の元のことを点と呼ぶことがある.

$\mathbb{R}^n$ の2つの点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

をそれぞれ, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積, $\mathbf{x}$ のノルムという. さらに,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$$

を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の距離という. $n = 1$ のときは $d(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$) である.

命題 1.1 任意の点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つ.

- (1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であって, 「 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」.
- (2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- (3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

証明 (1), (2) は定義からすぐにわかるので (3) だけ証明する. $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ とおけば, 示すべき不等式は, $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ と同値である. さらに,

$$(\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 - \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| - (\mathbf{v}, \mathbf{w}))$$

が成り立つから, $\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \geq (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を確かめればよい. いま, 実数 t について

$$\|t\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})t + \|\mathbf{w}\|^2$$

を考えると, これは常に正であるから, t に関する2次式としての判別式 D は0以下である. よって, $D/4 = (\mathbf{v}, \mathbf{w})^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \leq 0$, ゆえに, $\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \geq |(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \geq (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を得る. $\square$

数列とは, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上で定義された実数値関数のことであり, ふつう, 各 $j \in \mathbb{N}$ の像 $x_j \in \mathbb{R}$ を用いて $\{x_j\}$ と表される. これを拡張して, $\mathbb{N}$ からユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への写像 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の点列という. 各 $j \in \mathbb{N}$ の像が $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ であるとき, この点列を $\{\mathbf{x}_j\}$ で表す.

定義 1.2 $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_j\}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ が下記の (*) をみたすとき, $\{x_j\}$ は x に収束するという.

- (*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して,
 $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \varepsilon$

定義 1.3 $x \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 r に対して,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$$

と定め, x を中心とする半径 r の開球体という.

定義 1.4 U を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. 任意の $x \in U$ に対して $B(x, \varepsilon) \subset U$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在するとき, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合という.

補題 1.5 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_j\}$ が U の点に収束しているとする. このとき, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, $k \leq j$ ならば $x_j \in U$ が成り立つ.

証明 $\{x_j\}$ が $x \in U$ に収束しているとする. U は開集合だから, $B(x, \varepsilon) \subset U$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する. さらに, この ε に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ が取れて, $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \varepsilon$, すなわち $x_j \in B(x, \varepsilon)$ が成り立つが, $B(x, \varepsilon) \subset U$ であったから $x_j \in U$ を得る. $\square$

定義 1.6 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数 (すなわち U から $\mathbb{R}$ への写像) とする. $x \in U$ が下記の (*) をみたすとき, f は x で連続であるという.

- (*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
 $d(y, x) < \delta$ であるすべての $y \in U$ について $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

さらに, U のすべての点で f が連続であるとき, f は連続であるという.

補題 1.7 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $x \in U$ とする. 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ が x で連続ならば, x に収束する U 内の任意の点列 $\{x_j\}$ について, 数列 $\{f(x_j)\}$ は $f(x)$ に収束する.

証明 U 内の点列 $\{x_j\}$ が x に収束しているとする. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. f は x で連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $d(y, x) < \delta$ をみたすすべての $y \in U$ に対して $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立っている. 一方, $\{x_j\}$ は x に収束しているので, この δ に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ がとれて, $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \delta$, よって $|f(x_j) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立ち題意が示された. $\square$

§2. 距離空間

定義 2.1 X を集合とする. 関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は, 以下の (D1), (D2), (D3) をみたすとき, X 上の距離または距離関数といい, (X, d) を距離空間という.

(D1) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であって, 「 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 」.

(D2) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (三角不等式という).

例 2.2 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には, 前節で述べたように距離 d が定義されていて, $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間となっている. 同様にして,

$$\mathbb{C}^n = \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \}$$

においても, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2}$$

と定めれば, $d: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の距離であり, $(\mathbb{C}^n, d)$ は距離空間となる.

例 2.3 (離散距離) 任意の集合 X 上に $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}), \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定めると, ρ は X 上の距離となる. これを離散距離といい, 距離空間 (X, ρ) を離散距離空間という.

定義 2.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 各 $\mathbf{v} \in V$ に対して, 実数 $\|\mathbf{v}\|$ が定まっていて, 以下の (N1), (N2), (N3) がみたされるとき, 関数 $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ をノルムといい ($\|\mathbf{v}\|$ を $\mathbf{v}$ のノルムということが多い), $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間という (そのまんまだけど, ノルムが定義された空間ということもある).

(N1) 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して, $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ であって, 「 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 」.

(N2) 任意の $\mathbf{v} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$.

(N3) 任意の $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対して, $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

補題 2.5 $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とすると,

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

は V 上の距離であり, (V, d) は距離空間となる.

証明 定義 2.4 にある性質 (N1)–(N3) から, 定義 2.1 の性質 (D1)–(D3) がそれぞれ導かれることを確かめる.

(D1): $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ならば, (N1) より $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq 0$ かつ, $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(D2): 任意の $\mathbf{v} \in V$ について, (N2) より $\|-\mathbf{v}\| = |-1| \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ だから, $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

(D3): V の 3 つの元 $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ に対して, (N3) より $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| \geq \|(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{z})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{v}, \mathbf{z})$. $\square$

例 2.6 実数 $p \geq 1$ をひとつ固定する. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定めれば, $\|\cdot\|_p$ は $\mathbb{R}^n$ のノルムとなることが知られている. 一般の $p \geq 1$ について $\|\cdot\|_p$ が $\mathbb{R}^n$ のノルムであること (とくに (N3)) の証明は簡単ではない. しかし, $p = 2$ の場合は前節で定義した意味でのノルムと一致し, 命題 1.1 の証明を参考にすれば, $\|\cdot\|_2$ がノルムであることが証明できるであろう. $p = 1$ のとき, すなわち

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

は**絶対値ノルム**とよばれる. さらに, $p \rightarrow \infty$ と考えて,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

と定めれば, $\|\cdot\|_\infty$ も $\mathbb{R}^n$ のノルムとなる. これを**最大値ノルム**という. $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ がノルムであることの証明は難しくない.

例 2.7 $C[0, 1]$ を区間 $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ で定義された実数値連続関数全体の作る $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 実数 $p \geq 1$ をひとつとり, $f \in C[0, 1]$ に対して

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定めると, $C[0, 1]$ のノルムとなる. また,

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1 \}$$

もノルムとなる.

§3. 点列の収束

X を集合とする. X の点列とは, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から X への写像のことであり, 各 $n \in \mathbb{N}$ の像を $x_n \in X$ とするとき, $\{x_n\}$ と表すのがふつうである.

定義 3.1 (X, d) を距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ と $x \in X$ が下記の (*) をみたすとき, $\{x_n\}$ は x に**収束**するという.

$$(*) \quad \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } n_0 \in \mathbb{N} \text{ が存在して,} \\ n_0 \leq n \text{ ならば } d(x_n, x) < \varepsilon \end{array}$$

このとき, x を点列 $\{x_n\}$ の**極限**という.

注意 点列 $\{x_n\}$ が x に収束することと, 数列 $\{d(x_n, x)\}$ が 0 に収束することは同値である.

定理 3.2 距離空間において, 収束する点列の極限は一意的に定まる. すなわち, (X, d) を距離空間とし, X の点列 $\{x_n\}$ が $x, y \in X$ のどちらにも収束するならば, $x = y$ が成り立つ.

証明 $x \neq y$ と仮定して矛盾を導く. いま $\varepsilon = d(x, y)/2$ とおくと, $x \neq y$ より $\varepsilon > 0$ である. $\{x_n\}$ は x に収束するから, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_1 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$. 一方, y にも収束するから, ある $n_2 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_2 \leq n$ ならば $d(x_n, y) < \varepsilon$. そこで $m = \max\{n_1, n_2\}$ とおけば, $d(x_m, x) < \varepsilon$ かつ $d(x_m, y) < \varepsilon$ となるので, $2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < 2\varepsilon$ となって矛盾する. $\square$

収束する点列 $\{x_n\}$ の極限が x であるとき,

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{あるいは} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

などと表すことがある.

定義 3.3 d_1, d_2 を集合 X 上の2つの距離とする. X の任意の点 x および点列 $\{x_n\}$ に対して, 次の (i) と (ii) が同値であるとき, d_1 と d_2 は**同じ位相を定める**という.

(i) (X, d_1) において $\{x_n\}$ は x に収束する, すなわち $d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

(ii) (X, d_2) において $\{x_n\}$ は x に収束する, すなわち $d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

命題 3.4 d_1, d_2 を集合 X 上の2つの距離とする. もし, ある実数 $\lambda, \mu > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\lambda d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \mu d_1(x, y)$$

が成り立つならば, d_1, d_2 は同じ位相を定める.

証明 X の点列 $\{x_n\}$ および点 x を任意にとる. $n \rightarrow \infty$ のとき, $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ と仮定すると, $d_2(x_n, x) \leq \mu d_1(x_n, x)$ より $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ となる. 一方で, $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ と仮定すると, $d_1(x_n, x) \leq \lambda^{-1} d_2(x_n, x)$ より $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ を得る. よって, d_1, d_2 は同じ位相を定める. $\square$

系 3.5 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ を V の2つのノルムとする. もし, ある実数 $\lambda, \mu > 0$ が存在して, 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して

$$\lambda \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|' \leq \mu \|\mathbf{v}\|$$

ならば, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ から定まる V 上のそれぞれの距離は同じ位相を定める.

例 3.6 有限集合 X 上の距離 d はつねに離散距離 ρ と同じ位相を定める (例 2.3 参照). 実際, $\{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$ の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とすれば, $0 < m \leq M$ であって, $m\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq M\rho(x, y)$ がすべての $x, y \in X$ について成り立つから, 命題 3.4 より d と ρ は同じ位相を定める.

例 3.7 $\mathbb{R}^n$ のノルム $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$) および $\|\cdot\|_\infty$ について考える (例 2.6 参照). $p > 1$ のとき, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ について

$$\frac{1}{n} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_1$$

が成り立つことが以下のようにして確かめられる. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする.

- (左の不等式): $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq n \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = n\|\mathbf{x}\|_\infty$ を n で割ればよい.

- (真ん中の不等式): $\|\mathbf{x}\|_\infty^p \leq |x_1|^p + \dots + |x_n|^p = \|\mathbf{x}\|_p^p$ の p 乗根をとればよい.

- (右の不等式): $\|\mathbf{x}\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^p = \|\mathbf{x}\|_1^p$ の p 乗根をとればよい.

よって, 系 3.5 より, $1 \leq p \leq \infty$ のとり方に関わらず, $\|\cdot\|_p$ から定まる $\mathbb{R}^n$ 上の距離はどれも同じ位相を定める.

例 3.8 $C[0, 1]$ のノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ について考える (例 2.7 参照). $f_n(x) = x^n$ で定義された $f_n \in C[0, 1]$ について,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるが, $\|f_n\|_\infty = \max \{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\} = 1$ であるから, $\|\cdot\|_1$ から定まる距離と $\|\cdot\|_\infty$ から定まる距離は同じ位相を定めない.

定義 3.9 集合 X 上の距離 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ の像 $d(X \times X)$ が $\mathbb{R}$ において有界集合であるとき, d は有界であるという. すなわち, d が有界であるとは, ある $M > 0$ が存在して, すべての $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \leq M$ が成り立つことである.

命題 3.10 任意の距離空間 (X, d) に対して, d と同じ位相を定める X 上の有界な距離が存在する.

証明 $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ と定める.

(1) d' が X 上の距離であること: d' が定義 2.1 の性質 (D1)–(D3) をみたすことを確かめればよい. (D1) と (D2) はすぐにわかるので, 以下, (D3) すなわち三角不等式

$$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

がすべての $x, y, z \in X$ に対して成り立つことを示す. $d(x, y), d(y, z)$ が 1 より大きいかどうかで場合分けする.

- 「 $d(x, y) > 1$ または $d(y, z) > 1$ のとき」 $d'(x, y) = 1$ または $d'(y, z) = 1$ だから,

$$d'(x, z) = \min\{d(x, z), 1\} \leq 1 \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

- 「 $d(x, y) \leq 1$ かつ $d(y, z) \leq 1$ のとき」 $d'(x, y) = d(x, y)$ かつ $d'(y, z) = d(y, z)$ となる. よって, d についての三角不等式を用いて

$$d'(x, z) = \min\{d(x, z), 1\} \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d'(x, y) + d'(y, z)$$

(2) d' が有界であること: すべての $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) \leq 1$ からわかる.

(3) d, d' が同じ位相を定めること: X の任意の点列 $\{x_n\}$ と点 x に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $d(x_n, x) \rightarrow 0$ と $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ が同値であることを示せばよい.

- まず, $d(x_n, x) \rightarrow 0$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_0 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$ となる. よって, $d'(x_n, x) = \min\{d(x_n, x), 1\} \leq d(x_n, x) < \varepsilon$ がいて, $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ が導かれた.

- 次に, $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ を仮定する. 任意の ε に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_1 \leq n$ ならば $d'(x_n, x) < \min\{\varepsilon, 1\}$ が成り立つようにできる. 最後の不等式から, $d'(x_n, x) < 1$ かつ $d'(x_n, x) < \varepsilon$ がいえるが, 前者から $d'(x_n, x) = d(x_n, x)$ が得られ, 後者とあわせて $d(x_n, x) < \varepsilon$ が導かれる. よって $d(x_n, x) \rightarrow 0$ が示された. $\square$

§4. 連続写像

定義 4.1 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $x_0 \in X$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が下記の $(*)$ をみたすとき, f は x_0 で**連続**であるという.

$$(*) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ d_X(x, x_0) < \delta \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

X のすべての点で f が連続であるとき, f は**連続写像**であるという. $Y = \mathbb{R}$ かつ d_Y が $\mathbb{R}$ の通常距離であるとき, f を**連続関数**とよぶことが多い.

例 4.2 (X, d) を距離空間とし, 点 $p \in X$ をひとつ固定する. $x \in X$ に対して $f_p(x) = d(x, p)$ とおくと, $f_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数である. これを確かめるために, $x_0, x \in X$ のとき,

$$|f_p(x) - f_p(x_0)| = |d(x, p) - d(x_0, p)| \leq d(x, x_0)$$

が成り立つことに注意する (右の不等式は, $d(x, p) - d(x_0, p)$ の符号で場合分けして三角不等式を適用すればよい). そこで, 任意の ε に対して, $\delta = \varepsilon$ ととれば, $d(x, x_0) < \delta$ をみたすすべての $x \in X$ について, $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つことがわかり, f_p が x_0 で連続であることが確かめられた.

例 4.3 離散距離空間 (例 2.3) から任意の距離空間への任意の写像は連続である. これは以下のようにして確かめられる. (X, ρ) を離散距離空間とし, 距離空間 (Y, d) と写像 $f: X \rightarrow Y$ を任意にとる. $x_0, x \in X$ のとき, $\rho(x, x_0) < 1$ ならば $\rho(x, x_0) = 0$, すなわち $x = x_0$ なので, 当然 $d(f(x), f(x_0)) = 0$ となる. つまり, $x_0 \in X$ のとき,

$$\text{どのような } \varepsilon > 0 \text{ に対しても, } \delta = 1 \text{ ととれば,} \\ \rho(x, x_0) < \delta \text{ であるすべての } x \in X \text{ について } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立ち, f の x_0 での連続性が示されたことになる.

命題 4.4 $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ を距離空間, $x_0 \in X$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が x_0 で連続, かつ写像 $g: Y \rightarrow Z$ が $f(x_0)$ で連続ならば, 合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は x_0 で連続である. とくに, f, g が連続写像ならば $g \circ f$ は連続写像である.

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. g は $f(x_0)$ で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\#) \quad d_Y(y, f(x_0)) < \delta \text{ をみたすすべての } y \in Y \text{ について } d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

が成り立つ. さらに, f は x_0 で連続だから, この δ に対して, ある $\gamma > 0$ が存在して

$$d_X(x, x_0) < \gamma \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$$

が成り立つが, 最後の不等式は $(\#)$ を用いて, $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$ と書き換えることができる. 以上をまとめれば,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\gamma > 0$ が存在して,

$$d_X(x, x_0) < \gamma \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon$$

すなわち, $g \circ f$ の x_0 での連続性が示された. $\square$

定理 4.5 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $x_0 \in X$ とするとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は x_0 で連続である.

(ii) x_0 に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して, Y の点列 $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): f が x_0 で連続であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ について

$$(b) \quad d_X(x, x_0) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

となっている. (ii) を示すために, x_0 に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を考えると, 上でとった δ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて,

$$n_0 \leq n \text{ ならば } d_X(x_n, x_0) < \delta$$

をみたすが, (b) より, 最後の不等式は $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ と書き換えることができる. よって, $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 対偶を示す. (i) が成り立たないとする. ある $\varepsilon > 0$ が存在して, どんな $\delta > 0$ をとっても, ある $x \in X$ が存在して,

$$「d_X(x, x_0) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon」 \text{ が成り立っていない,}$$

すなわち,

$$「d_X(x, x_0) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon」 \text{ が成り立つ.}$$

とくに $\delta = 1/n$ をとったときの $x \in X$ を x_n とする. このとき $d_X(x_n, x_0) < 1/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より $\{x_n\}$ は x_0 に収束する. 一方で, すべての n に対して $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ だから, $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束しない. よって, (ii) は成り立たない. $\square$

定理 4.5 により, 写像の連続性は, 距離そのものに依存するのではなく, “距離の定める位相” のみに依存することがわかる. すなわち, 次が成り立つ.

系 4.6 d_X, d'_X が集合 X 上の距離で同じ位相を定め、 d_Y, d'_Y が集合 Y 上の距離で同じ位相を定めるならば、写像 $f: X \rightarrow Y$ と $x_0 \in X$ に対して、次は同値である。

- (i) f は x_0 で、 X の距離 d_X と Y の距離 d_Y に関して連続
- (ii) f は x_0 で、 X の距離 d'_X と Y の距離 d'_Y に関して連続

定義 4.7 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。 f が全単射であり、逆写像 f^{-1} も連続であるとき、 f を**同相写像**という。 X から Y への同相写像が存在するとき、 (X, d_X) と (Y, d_Y) は**同相**であるという。

注意 同相であることも“距離の定める位相”だけによる概念である。 すなわち、系 4.6 の記法の下で、 (X, d_X) と (Y, d_Y) が同相であることと、 (X, d'_X) と (Y, d'_Y) が同相であることは同値である。

定義 4.8 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。 すべての $x, x' \in X$ に対して $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つとき、 f を**等長写像**という。

命題 4.9 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を等長写像とする。

- (1) f は単射である。
- (2) f は連続写像である。
- (3) もし f が全射ならば、 f は同相写像である。

証明 (1) $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ をみたすとする、 $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0$ より $x = x'$ を得る。

(2) $x_0 \in X$ および x_0 に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を任意にとると、

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) = d_X(x_n, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから、 $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する。 よって、定理 4.5 より f は x_0 で連続である。 任意の $x_0 \in X$ で f は連続なので、 f は連続写像である。

(3) f が全射のとき、(1) より f は全単射であり、その逆写像 f^{-1} が定義できる。 (2) より f は連続であるが、あきらかに f^{-1} も等長写像であるから f^{-1} も連続である。 よって、 f は同相写像である。 $\square$

§5. 部分空間と直積空間

定義 5.1 (X, d_X) を距離空間とし, $A \subset X$ とする. $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \times A$ に制限して得られる A 上の距離を $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき, 距離空間 (A, d_A) を (X, d_X) の部分距離空間, または略して部分空間という.

注意 d_X と d_A は実質的に同じものなので, 区別せずに記すことが多い.

例 5.2 $\mathbb{R}$ の部分空間について考える.

(1) 閉区間 $[0, 1]$ と閉区間 $[0, 2]$ は同相である. 実際, 同相写像として $f(x) = 2x$ をとることができる ($g(x) = 2x^2$ も同相写像じゃん, と思った人はえらい!). 同様に, 开区間 $(0, 1)$ と开区間 $(0, 2)$ も同相である.

(2) 一般に, $a < b, c < d$ のとき, 閉区間 $[a, b]$ と閉区間 $[c, d]$ は同相であり, 开区間 (a, b) と开区間 (c, d) は同相である.

(3) $f(x) = e^{-x}$ は, 区間 $(0, \infty)$ から $(0, 1)$ への同相写像であり, $g(x) = \log x$ は, $(0, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への同相写像だから, $(0, 1), (0, \infty), \mathbb{R}$ は互いに同相である.

(4) 一般に, 実数 a, b, c について, $a < b$ ならば, 开区間

$$(a, b), (c, \infty), (-\infty, c), (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

はどれも互いに同相である.

(4) 閉区間 $[0, 1]$ と开区間 $(0, 1)$ は同相ではない. この証明はちょいムズなので, もう少し学習が進んでから証明いたしましょう.

(5) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とみなす. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, x に収束する $\mathbb{Q}$ の点列 $\{a_n\}$ が存在する. そのような点列は $\mathbb{Q}$ において収束するとは限らない (たとえば $x = \sqrt{2}$ を考えてみよ).

(6) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とみなすと, その距離は離散距離と同じ位相を定める. このことは, 命題 3.10 (の証明) から確かめることができる.

定義 5.3 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とするとき, 直積集合 $X \times Y$ 上の実数値関数 d, d_2, d_∞ をそれぞれ以下のように定める.

$$\begin{aligned} d((x, y), (x', y')) &= d_X(x, x') + d_Y(y, y'), \\ d_2((x, y), (x', y')) &= \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}, \\ d_\infty((x, y), (x', y')) &= \max \{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} \end{aligned}$$

命題 5.4 前定義における, d, d_2, d_∞ は $X \times Y$ 上の距離であり, さらにこれらは同じ位相を定める.

証明 d, d_2, d_∞ がそれぞれ $X \times Y$ 上の距離であること確かめるのは難しくない. また,

$$d_\infty((x, y), (x', y')) \leq d_2((x, y), (x', y')) \leq d((x, y), (x', y')) \leq 2d_\infty((x, y), (x', y'))$$

が成り立つことも簡単に示すことができるから, 命題 3.4 によって結論を得る. $\square$

定義 5.5 定義 5.3 において, 距離空間 $(X \times Y, d)$ を $(X, d_X), (Y, d_Y)$ の**積空間**, または**直積空間**という.

この定義では $X \times Y$ 上の距離として d を採用したが, 命題 5.4 により, d_2 や d_∞ を採用しても, 収束や連続にかかわる性質 (位相的性質とよばれる) は変わらない.

さて, 集合 X 上の距離は積空間 $X \times X$ 上の関数であった. その連続性について以下の命題が成り立つ (例 4.2 と比較せよ).

命題 5.6 距離空間 (X, d_X) 上の距離 $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は積空間 $(X \times X, d)$ 上の連続関数である.

証明 $(x, y) \in X \times X$ を任意にとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

ある $\delta > 0$ が存在して,

$$(*) \quad d((x, y), (x', y')) < \delta \text{ をみたすすべての } (x', y') \in X \times X \text{ について} \\ |d_X(x, y) - d_X(x', y')| < \varepsilon$$

であることをいえばよい. 一般に, 任意の $(x, y), (x', y') \in X \times X$ に対して, 三角不等式を二度使えば

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, x') + d_X(x', y) \leq d_X(x, x') + (d_X(x', y') + d_X(y', y))$$

が成り立つから, $d_X(x', y')$ を移行して,

$$d_X(x, y) - d_X(x', y') \leq d_X(x, x') + d_X(y, y') = d((x, y), (x', y')).$$

(x, y) と (x', y') の役割を入れ替えれば,

$$d_X(x', y') - d_X(x, y) \leq d((x', y'), (x, y))$$

もいえるから, 結局

$$|d_X(x, y) - d_X(x', y')| \leq d((x, y), (x', y'))$$

が導かれる. よって, $\delta = \varepsilon$ ととることで, 目標であった $(*)$ を得る. $\square$

命題 5.7 距離空間 (X, d_X) , (Y, d_Y) の積空間 $(X \times Y, d)$ の点 (x, y) および点列 $\{(x_n, y_n)\}$ について, 次は同値である.

- (i) $\{(x_n, y_n)\}$ は (x, y) に収束する.
- (ii) $\{x_n\}$ は x に収束し, かつ $\{y_n\}$ は y に収束する.

証明 (i) を仮定すると, $n \rightarrow \infty$ のとき $d((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$ である. d の定義から $d_X(x_n, x) \leq d((x_n, y_n), (x, y))$ だから, $d_X(x_n, x) \rightarrow 0$, したがって $x_n \rightarrow x$, 同様にして $y_n \rightarrow y$ が得られ, (i) が導かれる.

逆に (ii) を仮定すれば, $n \rightarrow \infty$ のとき $d_X(x_n, x) \rightarrow 0$ かつ $d_Y(y_n, y) \rightarrow 0$ だから, $d((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$, すなわち (i) を得る. $\square$

系 5.8 X, Y, Z を距離空間とし, 写像 $F: Z \rightarrow X \times Y$ を考える. F を成分ごとに $F(z) = (F_X(z), F_Y(z))$ と表すとき, F が連続であるためには, F_X, F_Y がどちらも連続であることが必要十分である.

証明 F が連続であるとする. 定理 4.5 より, Z の点列 $\{z_n\}$ が $z \in Z$ に収束するならば, $F(z_n) = (F_X(z_n), F_Y(z_n))$ は $F(z) = (F_X(z), F_Y(z))$ に収束する. したがって前命題より, $F_X(z_n)$ は $F_X(z)$ に収束し, $F_Y(z_n)$ は $F_Y(z)$ に収束する. よって再び定理 4.5 を適用して, F_X, F_Y どちらも連続であることが導かれ, 必要性が示された. 逆をたどれば十分性も確かめられる. $\square$

注意 この系は, 写像 $F: Z \rightarrow X \times Y$ の連続性が成分ごとの写像の連続性に帰着されることを示している. 逆向きの写像 $G: X \times Y \rightarrow Z$ についても, G が連続ならば, 成分ごとの連続性, すなわち

- 任意の $x_0 \in X$ について, $g_Y: Y \rightarrow Z, y \mapsto G(x_0, y)$ は連続であり,
- (*) かつ
- 任意の $y_0 \in Y$ について, $g_X: X \rightarrow Z, x \mapsto G(x, y_0)$ は連続である

が成り立つ. しかし, 逆は一般には成り立たない. つまり (*) が成り立っても, G が連続であるとは限らない.

例 5.9 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$G(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき,} \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めると, (*) が成り立つ. しかし, $n \rightarrow \infty$ のとき $(1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0)$ であるにもかかわらず $G(1/n, 1/n) = 1/2 \not\rightarrow 0$ となるから, G は連続ではない.

以上の議論は、3つ以上有限個の距離空間 $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ の積空間に自然に拡張される。念のため、積空間の定義を書いておく。

定義 5.10 n を 2 以上の自然数とする。 n 個の距離空間 (X_i, d_i) ($i = 1, \dots, n$) に対して、直積集合

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, \dots, n) \}$$

上の距離 d を

$$d((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, x'_i)$$

によって定義することができる。距離空間 $\left(\prod_{i=1}^n X_i, d \right)$ を (X_i, d_i) ($i = 1, \dots, n$) の積空間または直積空間という。

さらに、可算無限個の距離空間の積空間も、ある条件の下で定義することが可能であるが、この講義では扱わないつもりである。

最後に、データ・サイエンスにおいて、データ間の「違い」を表す尺度として使われる距離を紹介する。

定義 5.11 (ハミング距離) 2つの元からなる集合 $B = \{0, 1\}$ を考える。自然数 n に対し、離散距離空間 (B, ρ) の n 個の積空間を (B^n, h_n) とすると、

$$h_n((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \text{“} a_i \neq b_i \text{ である } i \text{ の個数”}$$

となっている。 B^n の元は、 $0, 1$ からなる長さ n の数列（ビット列という）とみなすことができ、ビット列 $a, b \in B^n$ に対して、 $h_n(a, b)$ は異なる値をもつビット（位置）の個数になっている。たとえば、 B^8 の元 $a = 01101001, b = 01001101$ の間の距離は $h_8(a, b) = 2$ である。実際、前から3番目と6番目のビット値が異なり他のビット値は等しい、つまり、矢印 $\uparrow$ で示された2ヶ所でのみ値が異なる。

$$\begin{array}{cccccccc} a & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & & \end{array}$$

距離 h_n は（長さ n の）ハミング距離とよばれ、符号理論、機械学習などのデータ・サイエンスにおいて基本的なツールとなっている。

§6. 近傍, 開集合

定義 6.1 p を距離空間 (X, d) の点とする.

- (1) $\varepsilon > 0$ に対して, $U(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}$ を p の ε -近傍という.
- (2) $V \subset X$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ がとれて, $U(p, \varepsilon) \subset V$ とできるとき, V は p の近傍であるという.
- (3) p の近傍全体の族, すなわち $\{V \subset X \mid V \text{ は } p \text{ の近傍}\}$ を p の近傍系という.

定義 6.2 (X, d) を距離空間とし, $O \subset X$ とする. すべての $p \in O$ に対して, O が p の近傍となっているとき, O を開集合という. すなわち, O が開集合であるためには, 任意の $p \in O$ に対して, $U(p, \varepsilon) \subset O$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在することが必要十分である.

例 6.3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

- (1) 开区間 (a, b) は, 任意の $p \in (a, b)$ の近傍である.
- (2) 閉区間 $[a, b]$ も, 任意の $p \in (a, b)$ の近傍であるが, a や b の近傍ではない. したがって, (a, b) は開集合だが, $[a, b]$ は開集合ではない.

補題 6.4 (X, d) を距離空間とする. 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x の ε -近傍 $U(x, \varepsilon)$ は開集合である.

証明 $p \in U(x, \varepsilon)$ を任意にとる. $d(p, x) < \varepsilon$ より, $\delta = \varepsilon - d(p, x)$ とおけば $\delta > 0$ である. いま $y \in U(p, \delta)$ ならば, $d(y, p) < \delta$ と三角不等式から

$$d(y, x) \leq d(y, p) + d(p, x) < \delta + d(p, x) = \varepsilon$$

ゆえ, $y \in U(x, \varepsilon)$. したがって $U(p, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$ となるから, 定義 6.2 より $U(x, \varepsilon)$ は開集合である. □

命題 6.5 距離空間 (X, d) の部分集合 V と $p \in V$ について, 次は同値である.

- (i) V は p の近傍である.
- (ii) $p \in O \subset V$ をみたす開集合 O が存在する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) は、近傍の定義 6.1 (2) と前補題から直ちに示される. (ii) を仮定すると、開集合 O に含まれる ε -近傍 $U(p, \varepsilon)$ がとれ、 $U(p, \varepsilon) \subset V$ となるから、(i) を得る. $\square$

定理 6.6 距離空間 (X, d) の開集合全体が作る集合族を $\mathcal{O}$ とする:

$$\mathcal{O} = \{ O \subset X \mid O \text{ は } X \text{ の開集合} \}.$$

このとき、 $\mathcal{O}$ は以下をみたす.

(O1) $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$.

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば、 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $O_\lambda \in \mathcal{O}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

証明 (O1) はあきらかである.

(O2) O_1, O_2 を開集合とする. $p \in O_1 \cap O_2$ ならば、もちろん $p \in O_1$ だから、ある $\varepsilon_1 > 0$ がとれて $U(p, \varepsilon_1) \subset O_1$. 同様に、 $\varepsilon_2 > 0$ がとれて $U(p, \varepsilon_2) \subset O_2$ とできる. このとき、 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおけば、 $U(p, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ となるから、 $O_1 \cap O_2$ も開集合である.

(O3) すべての $\lambda \in \Lambda$ について O_λ は開集合とする. $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とすると、 $p \in O_{\lambda_0}$ である $\lambda_0 \in \Lambda$ が少なくともひとつ存在する. O_{λ_0} は開集合なので、 $U(p, \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$ をみたす $\varepsilon > 0$ がとれ、このとき $U(p, \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるから、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は開集合である. $\square$

近傍や開集合の概念によって、写像の連続性を特徴づけることができる. 実際、以下の二つの定理が成り立つ.

定理 6.7 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $p \in X$ について、次は同値である.

(i) f は p で連続である.

(ii) $f(p)$ の任意の近傍 V に対して、 $f^{-1}(V)$ は p の近傍である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): V を $f(p)$ の任意の近傍とすると、ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(f(p), \varepsilon) \subset V$. この ε に対して、(i) より、ある $\delta > 0$ がとれて、 $d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ が成り立つ. 下線部を書き換えると、 $x \in U(p, \delta)$ ならば $f(x) \in U(f(p), \varepsilon)$, すなわち $f(U(p, \delta)) \subset U(f(p), \varepsilon) \subset V$ となって、結局 $U(p, \delta) \subset f^{-1}(V)$ を得るが、このことは $f^{-1}(V)$ が p の近傍であることを示しているので、(ii) が導かれた.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $U(f(p), \varepsilon)$ は $f(p)$ の近傍なので、(ii) より、 $f^{-1}(U(f(p), \varepsilon))$ は p の近傍である. よって、ある $\delta > 0$ が存在して、 $U(p, \delta) \subset f^{-1}(U(f(p), \varepsilon))$ すなわ

ち, $f(U(p, \delta)) \subset U(f(p), \varepsilon)$ となっている. そこで, 前半の証明での推論を逆にたどれば, $d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ が得られ, f が p で連続であることが確かめられた. $\square$

定理 6.8 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は連続である.
- (ii) Y の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): f が連続であるとし, Y の開集合 O を任意にとる. 任意の $p \in f^{-1}(O)$ について, O は $f(p)$ の近傍だから, 定理 6.7 より, $f^{-1}(O)$ は p の近傍である. よって, 開集合の定義 6.2 より, $f^{-1}(O)$ は X の開集合であり, (ii) が示された.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $p \in X$ を任意にとる. $f(p)$ の任意の近傍 V に対して, 命題 6.5 から, $f(p) \in O \subset V$ をみたす Y の開集合 O がとれる. このとき $p \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$ であるが, 仮定 (ii) より, $f^{-1}(O)$ は X の開集合なので, 再び命題 6.5 から, $f^{-1}(V)$ は p の近傍である. よって, 定理 6.7 より, f は p で連続であり, (i) が得られた. $\square$

系 6.9 距離空間 X, Y の開集合系をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は同相写像である.
- (ii) f は全単射, かつ $\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} = \mathcal{O}_Y$

証明 f が全単射であるとき,

$$\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} \subset \mathcal{O}_Y \iff \text{「任意の } O \in \mathcal{O}_X \text{ に対して } f(O) \in \mathcal{O}_Y \text{」}$$

$$\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} \supset \mathcal{O}_Y \iff \text{「任意の } O \in \mathcal{O}_Y \text{ に対して } f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X \text{」}$$

が成り立つ. 前定理より, これらはそれぞれ, f^{-1} が連続であること, f が連続であることと同値である. よって, 同相写像の定義 4.7 より (i), (ii) の同値性が確かめられた. $\square$

次に, 近傍, 開集合の概念が, 点列の収束とどのように係わるかを以下に述べる.

命題 6.10 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ と $x \in X$ について, 次は同値である.

- (i) $\{x_n\}$ は x に収束する.
- (ii) x の任意の近傍 V に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in V$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): V を x の任意の近傍とすると, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(x, \varepsilon) \subset V$ となっている. この ε に対して, (i) より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$. 最後の不等式は $x_n \in U(x, \varepsilon)$ を意味するから, 結局 $x_n \in V$ が得られ (ii) が導かれる.
(ii) $\Rightarrow$ (i): $\varepsilon > 0$ を任意にとる. ε -近傍 $U(x, \varepsilon)$ は x の近傍なので, (ii) より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in U(x, \varepsilon)$, すなわち $d(x_n, x) < \varepsilon$ だから (i) が示された. $\square$

定理 6.11 距離空間 (X, d) の部分集合 O について, 次は同値である.

- (i) O は開集合である.
- (ii) O の点に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in O$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in O$ に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を任意にとる. 仮定 (i) より O は x の近傍だから, 前命題より (ii) を得る.
(ii) $\Rightarrow$ (i): もし O が開集合でないとすると, ある $x \in O$ が存在して, どんな $\varepsilon > 0$ をとっても $U(x, \varepsilon) \not\subset O$ となっている. とくに, 各自然数 n に対して $x_n \in U(x, 1/n)$ かつ $x_n \notin O$ をみたとす x_n がとれる. このとき, $d(x_n, x) < 1/n$ より $\{x_n\}$ は x に収束する. よって 仮定 (ii) より, $x_n \in O$ となる n が存在し, $\{x_n\}$ のとり方に矛盾する. $\square$

最後に, 近傍や開集合の概念が, “距離の定める位相” によって定まることに注意する. 実際, 次の命題が成り立つ.

命題 6.12 集合 X 上の2つの距離 d, d' が同じ位相を定めているとする. このとき, $p \in X$ と $V \subset X$ について, V が d に関する p の近傍であることと, V が d' に関する p の近傍であることは同値である. また, $O \subset X$ について, O が d に関する開集合であることと, O が d' に対する開集合であることは同値である.

証明 d に関する ε -近傍と, d' に関する ε -近傍を, この証明では分けて考え, それぞれ $U(p, \varepsilon), U'(p, \varepsilon)$ としておく;

$$U(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}, \quad U'(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d'(x, p) < \varepsilon\}.$$

いま, V が d に関する p の近傍とする. もし, d' に関しては p の近傍でないならば, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U'(p, 1/n) \not\subset V$ だから, $x_n \in U'(p, 1/n)$ かつ $x_n \notin V$ をみたとす $x_n \in X$ がとれる. このとき $d'(x_n, p) < 1/n$ だから, d' に関して $\{x_n\}$ は p に収束する. d と d' は同じ位相を定めるから, d に関して $\{x_n\}$ は p に収束している. よって, 命題 6.10 より, $x_n \in V$ となる n が存在し, x_n のとり方に反する. 以上より, V が d に関する p の近傍ならば, d' に関して p の近傍であることが示され, d, d' の役割を入れ替えれば, その逆も示されたことになる. 後半も, 開集合が近傍を用いて定義されていることからわかる. $\square$

§7. 閉集合, 内部, 閉包

定義 7.1 距離空間 (X, d) の部分集合 F は, その補集合 $F^c = X \setminus F$ が開集合のとき, 閉集合であるという. すなわち, F が閉集合であるためには, $y \notin F$ である任意の $y \in X$ に対して, $U(y, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在することが必要十分である.

定理 7.2 距離空間 (X, d) の閉集合全体が作る集合族を $\mathcal{F}$ とする:

$$\mathcal{F} = \{ F \subset X \mid F \text{ は } X \text{ の閉集合} \}.$$

このとき, $\mathcal{F}$ は以下をみたす.

- (F1) $X \in \mathcal{F}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
- (F3) $F_\lambda \in \mathcal{F}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

証明 (F1) は閉集合の定理から直ちにわかり, (F2), (F3) は, 定理 6.6 (O2), (O3) にド・モルガンの法則を適用すればよい. □

例 7.3 (1) $\mathbb{R}$ において, 閉区間は閉集合である.

(2) $\mathbb{R}^2$ において, $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ は閉集合である. 実際, D に属さない任意の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し, 十分小さい $\varepsilon > 0$ がとれて, $U((x, y), \varepsilon) \cap D = \emptyset$, よって D は閉集合である.

命題 7.4 (X, d) を距離空間, S を X の有限部分集合とする.

- (1) S は閉集合である.
- (2) O が開集合ならば, $O \setminus S$ も開集合である.
- (3) V が点 $p \in X$ の近傍で $p \notin S$ ならば, $V \setminus S$ も p の近傍である.

証明 (1) $y \notin S$ のとき, S が有限であることから, $\varepsilon = \min \{ d(x, y) \mid x \in S \}$ が定まり, $\varepsilon > 0$ となる. すべての $x \in S$ について $d(x, y) \geq \varepsilon$ だから, $U(y, \varepsilon) \cap S = \emptyset$, よって S は閉集合である.

(2) S^c は (1) により開集合だから, 定理 6.6 (2) から, $O \setminus S = O \cap S^c$ は開集合である.

(3) 命題 6.5 によって, $p \in O \subset V$ をみたす開集合 O がとれ, さらに $p \notin S$ より $p \in O \setminus S \subset V \setminus S$. よって, (2) を用いれば, 再び命題 6.5 から $V \setminus S$ は p の近傍であることがわかる. □

定理 7.5 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は連続である.
- (ii) Y の任意の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

証明 $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ と定理 6.8 から直ちに導かれる. □

定理 7.6 距離空間 (X, d) の部分集合 F について, 次は同値である.

- (i) F は閉集合である.
- (ii) F の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束するならば, $x \in F$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): F の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとする. もし, $x \notin F$ すなわち $x \in F^c$ ならば, 仮定 (i) より F^c は開集合だから, 定理 6.11 より, $x_n \in F^c$ となる自然数 n が存在することになり, $\{x_n\}$ が F の点列であることに矛盾する. よって $x \in F$ であり, (ii) を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i): もし F が閉集合でないとすると, F^c は開集合ではないから, ある $x \in F^c$ が存在して, どんな $\varepsilon > 0$ をとっても $U(x, \varepsilon) \not\subset F^c$ となっている. とくに, 各自然数 n に対して $x_n \in U(x, 1/n)$ かつ $x_n \notin F^c$ をみたす x_n がとれる. このとき, $d(x_n, x) < 1/n$ より $\{x_n\}$ は x に収束し, さらに $x_n \in F$ であるから, 仮定 (ii) より, $x \in F$ が導かれ, x のとり方に矛盾する. □

定義 7.7 A を距離空間 X の部分集合とし, $p \in X$ とする.

- (1) A が p の近傍であるとき, p は A の**内点**であるという. A の内点全体の集合を A の**内部**といい, A° で表す.
- (2) p の任意の近傍 V が $V \cap A \neq \emptyset$ をみたすとき, p は A の**触点**であるという. A の触点全体の集合を A の**閉包**といい, $\bar{A}$ で表す.

一般に, $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ が成り立つ. また, $A \subset B \subset X$ ならば, $A^\circ \subset B^\circ$ かつ $\bar{A} \subset \bar{B}$ である. さらに, 命題 6.5 を用いれば, 次の補題の証明は難しくない.

補題 7.8 A を距離空間 X の部分集合とし, $p \in X$ とする.

- (1) $p \in A^\circ \iff$ 「 $p \in O \subset A$ をみたす開集合 O が存在する」
- (2) $p \in \bar{A} \iff$ 「 $p \in O$ である任意の開集合 O について $O \cap A \neq \emptyset$ 」

補題 7.9 距離空間 X の部分集合 A について, $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ が成り立つ.

証明 X の部分集合 O, A について, 一般に「 $O \cap A \neq \phi \Leftrightarrow O \not\subset A^c$ 」が成り立つから, 補題 7.8 の (2), (1) を順に適用して,

$$\begin{aligned} p \in \overline{A} &\Leftrightarrow \text{「} p \in O \text{ である任意の開集合 } O \text{ について } O \not\subset A^c \text{」} \\ &\Leftrightarrow \text{「} p \in O \subset A^c \text{ をみたす開集合 } O \text{ は存在しない」} \Leftrightarrow p \notin (A^c)^\circ \end{aligned}$$

すなわち, $p \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow p \in (A^c)^\circ$ より等式を得る. $\square$

命題 7.10 A を距離空間 X の部分集合とする.

(1) A の内部は A に含まれる開集合全体の和集合である; $A^\circ = \bigcup_{\substack{O \text{ は開集合} \\ \text{かつ } O \subset A}} O$

とくに, A° は A に含まれる最大の開集合である.

(2) A の閉包は A を含む閉集合全体の共通部分である; $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ は閉集合} \\ \text{かつ } A \subset F}} F$

とくに, $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

証明 (1) は補題 7.8 (1) より直ちに示される. (2) を示すために, まず, 補題 7.9 より, $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ が成り立つことに注意する. そこで, A^c に対して (1) を適用し, ド・モルガンの法則を使えば,

$$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c = \bigcap_{\substack{O \text{ は開集合} \\ \text{かつ } O \subset A^c}} O^c$$

を得る. O が開集合全体を動くとき, O^c は閉集合全体を動き, さらに $O \subset A^c$ と $A \subset O^c$ は同値だから, 求めたい等式が導かれる. $\square$

系 7.11 距離空間 X の部分集合 A について,

(1) A は開集合 $\Leftrightarrow A = A^\circ$

(2) A は閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

補題 7.12 A を距離空間 X の部分集合とする. p が A の触点, すなわち $p \in \overline{A}$ ならば, p に収束する A の点列が存在する.

証明 触点の定義から, p の任意の ε -近傍 $U(p, \varepsilon)$ は A と共通部分をもつ. とくに, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U(p, 1/n) \cap A$ がとれる. このとき, $\{x_n\}$ は p に収束する A の点列である. $\square$

定義 7.13 A を距離空間 X の部分集合とする.

- (1) A^c の内点を A の**外点**といい, A の外点全体の集合を A の**外部**という. すなわち, 外部 $= (A^c)^\circ$ であるが, 補題 7.9 から, 外部 $= (\overline{A})^c$ と定めてもよい).
- (2) $\overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$ を A の**境界**といい, $\dot{A}$ で表す.

一般に, A の内部や外部は開集合であり, 閉包や境界は閉集合である. このことは, 命題 7.10 と前定義からすぐにわかる.

命題 7.14 A を距離空間 X の部分集合すると, X は, A の内部, 境界, 外部の互いに共通部分のない和として表される. すなわち

$$X = A^\circ \cup \dot{A} \cup (A^c)^\circ, \quad A^\circ \cap \dot{A} = \dot{A} \cap (A^c)^\circ = A^\circ \cap (A^c)^\circ = \phi.$$

証明 まず, $X = \dot{A} \cup (\dot{A})^c = \dot{A} \cup (\overline{A} \cap (A^\circ)^c)^c = \dot{A} \cup ((\overline{A})^c \cup A^\circ)$ だから, 補題 7.9 より, はじめの式を得る. また, $\dot{A} \subset (A^\circ)^c$ かつ $\dot{A} \subset \overline{A}$ より, $A^\circ \cap \dot{A} \subset A^\circ \cap (A^\circ)^c = \phi$ および $\dot{A} \cap (A^c)^\circ \subset \overline{A} \cap (\overline{A})^c = \phi$ が成り立ち, さらに, $A^\circ \cap (A^c)^\circ \subset A \cap A^c = \phi$ でもあるから, あとの式を得る. $\square$

命題 7.15 距離空間 X の部分集合 A に対して $B = A^c$ とおけば, $\dot{A} = \dot{B}$.

証明 前命題で示した共通部分のない和 $X = A^\circ \cap \dot{A} \cap (A^c)^\circ = B^\circ \cap \dot{B} \cap (B^c)^\circ$ を書き換えれば, $(\dot{A})^c = A^\circ \cap (A^c)^\circ = (B^c)^\circ \cap B^\circ = (\dot{B})^c$, したがって $\dot{A} = \dot{B}$ を得る. $\square$

最後に, この節で定義した概念 (閉集合, 内点, 内部, 触点, 閉包, 外点, 外部, 境界) も, 前節での近傍, 開集合と同様に, “距離” そのものではなく, “距離の定める位相” によって定まることを付け加えておく.

§8. 集積点, 稠密性

定義 8.1 X を距離空間, $p \in A \subset X$ とする. $V \cap A = \{p\}$ をみたす p の近傍 V が存在するとき, p を A の**孤立点**という.

定義 8.2 X を距離空間, A をその部分集合, $p \in X$ とする. p の任意の近傍 V が p と異なる A の点をもつとき, すなわち $p \neq x \in V \cap A$ をみたす点 x が存在するとき, p を A の**集積点**という.

定義により, A の孤立点はもちろん A に属するが, 集積点は必ずしも A に属するとは限らない. しかし, A に属する点に限定すれば, 次が成り立つことはあきらかである.

補題 8.3 X を距離空間, A をその部分集合とすると, $p \in A$ に対して, p が A の集積点であるためには, p が A の孤立点でないことが必要十分である.

以下に, 集積点の性質をいくつか挙げる.

補題 8.4 X を距離空間, A をその部分集合とする.

- (1) p が A の集積点ならば, p は A の触点, すなわち $p \in \overline{A}$ である.
- (2) p が A の触点で, かつ $p \notin A$ ならば, p は A の集積点である.

証明 (1) p が A の集積点ならば, p の近傍 V をどのようにとっても $(V \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$, とくに $V \cap A \neq \emptyset$ なので p は触点である.

(2) $p \in \overline{A} \setminus A$ とすると, p のどんな近傍 V に対しても $V \cap A \neq \emptyset$ であるが, $p \notin A$ より $p \notin V \cap A$, したがって $V \cap A$ は p でない点を含み, p は A の集積点である. $\square$

命題 8.5 (X, d) を距離空間とする. $A \subset X$ と $p \in X$ について, 次は同値である.

- (i) p は A の集積点である.
- (ii) p に収束する A の点列 $\{x_n\}$ で, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \neq p$ をみたすものが存在する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $U(p, 1/n)$ は p の近傍だから, 仮定 (i) によって, $p \neq x_n \in U(p, 1/n)$ をみたす $x_n \in A$ がとれる. このとき $d(x_n, p) < 1/n$ だから $\{x_n\}$ は p に収束し, (ii) を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i): V を p の任意の近傍とする. (ii) の性質をもつ A の点列 $\{x_n\}$ をとると, これは p に収束しているから, 命題 6.10 より, ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in V$. ここで, $x_n \neq p$ であったから, V は p でない A の点をもつ. したがって (i) が示された. $\square$

補題 8.6 A を距離空間 X の部分集合で, p が A の集積点ならば, p のどんな近傍 V も A の点を無限個含む, すなわち $V \cap A$ は無限集合である.

証明 $S = (V \cap A) \setminus \{p\}$ とおく. もし $V \cap A$ が有限集合ならば, S もそうなので, 命題 7.4 より, $V \setminus S$ は p の近傍である. p は A の集積点なので, $V \setminus S$ は p と異なる A の点 x を含む. このとき, $x \in V \setminus S$ より $x \notin S$ であり, 一方で $x \neq p$ かつ $x \in V \cap A$ より $x \in S$ となって矛盾する. $\square$

定義 8.7 A を距離空間 X の部分集合とする.

- (1) $\overline{A} = X$ であるとき, A は**稠密**であるという.
- (2) $(\overline{A})^\circ = \phi$ であるとき, A は**疎**であるという.

例 8.8 (1) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密である.

(2) 実無理数全体の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ において稠密である.

(3) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ において疎である.

(4) $a < b$ のとき, 区間 (a, b) , $[a, b]$ はどちらも $\mathbb{R}$ において疎ではない.

(5) $\mathbb{R}^2$ において, 直線 L は疎である.

命題 8.9 距離空間 X の部分空間 A が疎ならば, その補集合 A^c は稠密である.

証明 任意の $p \in X$ に対して $p \in \overline{(A^c)}$, すなわち p が A^c の触点であることを示せばよい. もし触点でなかったとすると, p の近傍 V が存在して $V \cap A^c = \phi$, つまり $V \subset A$ が成り立つ. よって p は A の内点であり, $p \in A^\circ \subset (\overline{A})^\circ$ であるが, このことは A が疎であること, $(\overline{A})^\circ = \phi$ に矛盾する. $\square$

命題 8.10 距離空間 X の部分集合 A が閉集合または開集合ならば, その境界 $\dot{A}$ は疎である.

証明 開集合の補集合は閉集合だから、命題 7.15 より、 A が閉集合のときに示せば十分である。さらに、境界 $\dot{A}$ は閉集合だから、 $(\dot{A})^\circ = \phi$ を確かめればよい。もし $(\dot{A})^\circ \neq \phi$ とすると、内部の定義と命題 6.5 より、 $\phi \neq O \subset \dot{A}$ をみたす開集合 O がとれる。ここで、 A が閉集合、すなわち $\bar{A} = A$ であることに注意すると、境界の定義から、

$$O \subset A \quad \text{かつ} \quad O \subset (A^\circ)^c$$

を得る。前者は、命題 7.10 により、 $O \subset A^\circ$ と書き換えることができるので、後者とあわせて、 $O \subset A^\circ \cap (A^\circ)^c = \phi$ となって O のとり方に矛盾する。□

例 8.11 (カントールの三進集合) 閉区間 $I = [0, 1]$ の部分集合 C を次のように定める。まず $C_0 = I = [0, 1]$ として、

$$C_1 = C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$$

$$C_2 = C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \right) = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right]$$

のように、残った閉区間をそれぞれ 3 等分して真ん中の开区間を取り除く操作を繰り返す。一般に、

$$\begin{aligned} (\clubsuit) \quad C_n &= C_{n-1} \setminus \bigcup_{j=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3j+1}{3^n}, \frac{3j+2}{3^n} \right) \\ &= \left[0, \frac{1}{3^n} \right] \cup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n} \right] \cup \cdots \cup \left[\frac{3^n-3}{3^n}, \frac{3^n-2}{3^n} \right] \cup \left[\frac{3^n-1}{3^n}, 1 \right] \end{aligned}$$

とする（取り除く部分が C_{n-1} に入っていないじゃん、という批判はごもっともだけど、差集合の定義からそれは大丈夫なのよ）と $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ となるが、この“極限”，正確には次の式で定義される C を**カントールの三進集合**という。

$$(\spadesuit) \quad C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

この定義はある意味で“直観的”であるが、次のように明示的に表すこともできる。

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mid a_1, a_2, \dots \in \{0, 2\} \right\}.$$

とくに、 C は非可算集合である。

証明 いま、 $a \in I = [0, 1]$ を三進展開し、 $a = 0.a_1a_2\dots$ ($a_j \in \{0, 1, 2\}$) と表す。ただし、有限小数で表せる $a \neq 0$ については、

$$0.a_1a_2\dots a_r1 = 0.a_1a_2\dots a_r022\dots$$

の場合は右辺のように表し,

$$0.a_1a_2\dots a_r2 = 0.a_1a_2\dots a_r122\dots$$

の場合は左辺のように表すことにする (とくに $1 = 0.22\dots$ に注意). このような表記のもとで, $a \in I$ の小数第 n 位が 1 であるとする

$$0.a_1\dots a_{n-1}022\dots < a < 0.a_1\dots a_{n-1}2$$

となるが, 左右の三進表示をふつうの記法で書けば, 左は $s = 1$, 右は $s = 2$ として

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{s}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^{n-1-k} + \frac{s}{3^n} = \frac{3j+s}{3^n}, \quad \text{ただし } j = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^{n-1-k}.$$

このとき $0 \leq j \leq 3^{n-1} - 1$ が簡単に確かめられ, 上の不等式は

$$\frac{3j+1}{3^n} < a < \frac{3j+2}{3^n} \quad \text{すなわち} \quad a \in \left(\frac{3j+1}{3^n}, \frac{3j+2}{3^n} \right)$$

と書き換えられる. よって, (♣) を見れば, 三進展開したとき小数第 n 位が 1 である $a \in I$ は, C_n を構成する際に取り除かれる数であることがわかる. したがって, C の元は 1 が現れない三進無限小数 $0.a_1a_2\dots$ として表され, このような数の全体が C を構成する. $\square$

C は, 距離空間 $I = [0, 1]$ の部分集合として次の性質をもつ.

- (1) C は疎な閉集合である.
- (2) $C^c = I \setminus C$ は稠密である.
- (3) C のすべての点は C の集積点である.

証明 (1) $C_0 = I$ は閉集合であり, C_1 は C_0 から开区間を除いたものなので閉集合, 以下同様にして, 一般に C_n は閉集合 C_{n-1} から有限個の开区間を除いたものなので, やはり閉集合である. C はそれらの共通部分 (♠) だから, 定理 7.2 (F3) より閉集合である. 次に, C が疎であることを示すには, $C^\circ = \emptyset$ を確かめればよい. そこで, $a \in C^\circ$ が存在したとして矛盾を導く. まず, $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ と表しておく. a は C の内点だから, $U(a, \varepsilon) \subset C$ をみたす $\varepsilon > 0$ がとれる. このとき $1/3^m < \varepsilon$ であるような自然数 m をとり,

$$b = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

と定めると, (a が有限小数で表せる場合は, あらかじめ m を十分大きくとっておくことで) $b \notin C$ となる. 一方, $a_m = 0$ または 2 より, $|a - b| = 1/3^m < \varepsilon$ すなわち $b \in U(a, \varepsilon) \subset C$ となって矛盾する.

(2) 命題 8.9 と (1) から導かれる.

(3) 任意の $a \in C$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a, \varepsilon) \cap C$ が a 以外の点を含むことを示せばよい. そのために, $2/3^m < \varepsilon$ をみたす自然数 m をとる. $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ のとき, $c_m = 2 - a_m$ すなわち c_m を, $a_m = 0$ のときは 2, $a_m = 2$ のときは 0 と定めて,

$$c = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{c_m}{3^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

と置く. このとき, (有限小数 a の場合, あらかじめ m を十分大きくとっておけば) $c \in C$ であって, $0 < |a - c| = 2/3^m < \varepsilon$ すなわち $a \neq c \in U(a, \varepsilon) \cap C$ を得る. $\square$

§9. 点列コンパクト性

距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ の**部分列** $\{x_{n_j}\}$ とは, $\{x_n\}$ から n_j 番目だけを取り出して得られる X の点列のことである. 正確には, $\{x_n\}$ が写像 $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ であるとき, ある狭義単調増加自然数列 $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ によって, $s \circ \mu: \mathbb{N} \rightarrow X$ で与えられる点列を $\{x_n\}$ の部分列という. いま $n_j = \mu(j)$ と書けば, $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ となっているが, このとき部分列 $s \circ \mu$ をふつう $\{x_{n_j}\}$ と表すわけである.

定義 9.1 X を距離空間とする.

- (1) X の任意の点列が収束する部分列をもつとき, X は**点列コンパクト**であるという.
- (2) X の部分集合 A は, 部分距離空間として点列コンパクトであるとき, 点列コンパクトであるという. すなわち, A の任意の点列が A の点に収束する部分列をもつとき, A は点列コンパクトであるという.

例 9.2 $\mathbb{R}$ の开区間 (a, b) は点列コンパクトではない. 実際, 数列 $\{x_n\}$ として, たとえば $x_n = a + (b-a)/2^n$ を考えれば, $x_n \in (a, b)$ であるが, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow a$ が成り立つから, $\{x_n\}$ のどんな部分列をとっても a に収束し, (a, b) の元には収束しない. よって (a, b) は点列コンパクトではない. 同じ理由で, 半开区間 $(a, b]$, $[a, b)$ も点列コンパクトではない. じゃあ閉区間 $[a, b]$ はどうよ, という疑問には, も少しあとでお答えしましょう (定理 9.6).

補題 9.3 点列コンパクトな距離空間の閉集合は点列コンパクトである.

証明 A を点列コンパクトな距離空間 (X, d) の閉集合とする. A の任意の点列 $\{x_n\}$ をとると, それはもちろん X の点列でもあるから, X において収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすると, A が閉集合であることと定理 7.6 より, $x \in A$ が導かれる. よって A は点列コンパクトである. $\square$

補題 9.4 距離空間の点列コンパクトな部分集合は閉集合である.

証明 X を距離空間, A をその点列コンパクトな部分集合とする. いま, A の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束しているとする. このとき, $x \in A$ を示せば, 定理 7.6 から A が閉集合であることがいえる. いま, A は点列コンパクトだから $\{x_n\}$ は A の点 a に収束する部分列をもつが, もともと $\{x_n\}$ は x に収束するので $x = a$ でなくてはならず, $x \in A$ が確かめられた. $\square$

定理 9.5 有限個の点列コンパクト距離空間の直積空間は点列コンパクトである.

証明 2個の場合, すなわち, 距離空間 X, Y がどちらも点列コンパクトのとき, 直積空間 $X \times Y$ も点列コンパクトであることを示せばよい. いま, $X \times Y$ 上の任意の点列 $\{p_n\}$ に対して, $p_n = (x_n, y_n)$ とかけば, $\{x_n\}, \{y_n\}$ はそれぞれ X, Y の点列である. X は点列コンパクトなので, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}$ で, ある $x \in X$ に収束するものがとれる. つぎに, Y も点列コンパクトだから, $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_{j_k}}\}$ に対して, その部分列 $\{y_{n_{j_k}}\}$ で, ある $y \in Y$ に収束するものがとれる. このとき, $x_{n_{j_k}} \rightarrow x, y_{n_{j_k}} \rightarrow y$ ($k \rightarrow \infty$) なので, 命題 5.7 より, $\{p_n\}$ の部分列 $\{p_{n_{j_k}}\}$ は (x, y) に収束する. したがって $X \times Y$ は点列コンパクトである. $\square$

注意 直積集合には, 定義 5.3 にあるように異なる距離 d, d_2, d_∞ が定義できる. にもかかわらず, 命題 5.4 より, これらは同じ位相を定めるので, どの距離を用いても「点列コンパクト」の定義は同じことになる.

定理 9.6 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ は点列コンパクトである.

証明 (微積の授業でやってるはずなので, 復習のつもりで...) $x_n \in [a, b]$ である任意の数列 $\{x_n\}$ をとる. いま c を a, b の中点とすると, $[a, c], [c, b]$ の少なくとも一方は無限個の $n \in \mathbb{N}$ について x_n を含む. それを $[a_1, b_1]$ とする. 次に a_1, b_1 の中点 c_1 をとると, $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ の少なくとも一方は無限個の $n \in \mathbb{N}$ について x_n を含む. それを $[a_2, b_2]$ とする. 以下同様にして a_j, b_j を順に定めると, 無限個の $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in [a_j, b_j]$ であり, しかも

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b,$$

$$0 < b_j - a_j = \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

が確かめられる. よって, 区間縮小法の原理より, すべての j に対して $d \in [a_j, b_j]$ である実数 d が一意的に存在し,

$$a_j \rightarrow d, \quad b_j \rightarrow d \quad (j \rightarrow \infty).$$

最後に $\{x_n\}$ の部分列を以下のように定める. まず, $x_n \in [a_1, b_1]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限にあるから, そのような n を任意にひとつ選び n_1 とする. 次に, $x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限にあるから, $n_1 < n_2$ かつ $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ であるように n_2 がとれる. 同様にして, 各 $j \geq 2$ に対して, n_j を $n_{j-1} < n_j$ かつ $x_{n_j} \in [a_j, b_j]$ をみたすようにとることができ, 部分列 $\{x_{n_j}\}$ を作ることができる. このとき

$$a_j \leq x_{n_j} \leq b_j$$

となっているので, $x_{n_j} \rightarrow d$ ($j \rightarrow \infty$) を得る. ここで, $d \in [a, b]$ だから, $\{x_{n_j}\}$ は $[a, b]$ の元に収束する部分列であり, $[a, b]$ が点列コンパクトであることが示された. $\square$

定理 9.7 (ボルツァノ-ワイエルシュトラス) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について、 A が点列コンパクトであるためには、 A が有界閉集合であることが必要十分である。

証明 【必要性】 A が点列コンパクトであるとする。補題 9.4 より A は閉集合であることは示されているから、有界性を確かめればよい。もし有界でないとすると、各自然数 n に対して $\|x_n\| \geq n$ をみたす $x_n \in A$ がとれる。仮定より、点列 $\{x_n\}$ は A の点に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ。その極限を $x \in A$ とすると、とくに、ある $j_0 \in \mathbb{N}$ がとれて、 $j_0 \leq j$ ならば $\|x_{n_j} - x\| < 1$ が成り立つ。そこで、自然数 j を $j \geq \max\{j_0, 1 + \|x\|\}$ をみたすようにとれば

$$n_j \leq \|x_{n_j}\| \leq \|x_{n_j} - x\| + \|x\| < 1 + \|x\| \leq j \leq n_j$$

となって矛盾する。

【十分性】 A が有界閉集合であるとする。有界性から、 A は $\mathbb{R}$ の有界閉区間の直積 C に含まれる、すなわち $a_i < b_i$ をみたす実数 a_i, b_i が存在して

$$A \subset C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

このとき、定理 9.6 と定理 9.5 より、 C は点列コンパクトである。さらに A は閉集合（正確には $\mathbb{R}^n$ の部分空間 C の閉集合）だから、補題 9.3 より点列コンパクトである。□

定理 9.8 $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像で、 X が点列コンパクトであるとする。

- (1) $f(X)$ も点列コンパクトである。
- (2) f が単射ならば、 $f(X)$ と X は同相である。
- (3) f が全単射ならば、 f は同相写像である。

証明 (1) $f(X)$ の任意の点列 $\{y_n\}$ について、 $f(x_n) = y_n$ をみたす $x_n \in X$ を各 n に対してひとつずつとる。 X は点列コンパクトなので、点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ。そこで、 $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすれば、 f の連続性から $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$ ($j \rightarrow \infty$) でなければならない。すなわち $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_j}\}$ は $f(x) \in f(X)$ に収束し、 $f(X)$ が点列コンパクトであることが示された。

(2) f の単射性より、写像 $g: f(X) \rightarrow X$ を $g = f^{-1}$ として自然に定義することができる。そこで、(2) を示すためには、 g が連続であることがいえればよい。いま、 A を X の任意の閉集合とすると、補題 9.3 より A は点列コンパクト、よって (1) で示したように、 $f(A)$ は点列コンパクトになるから、補題 9.4 より閉集合である。すなわち、 $f(A) = g^{-1}(A)$ が閉集合であるから、定理 7.5 によって、 g が連続であることがわかる。

(3) は (2) から直ちに導かれる。 □

定理 9.9 空でない点列コンパクト距離空間上の実数値連続関数は、最大値、最小値をもつ.

証明 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を点列コンパクト距離空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とすると、前定理の (1) から $f(X)$ は点列コンパクトであり、さらに定理 9.7 より $f(X)$ は有界閉集合である. とくに有界性から $M = \sup f(X)$ が存在する. このとき, M に収束する $f(X)$ の数列がとれるが, $f(X)$ は閉集合なので, 定理 7.6 によって $M \in f(X)$, したがって M は $f(X)$ の最大値である. 同様にして, $\inf f(X)$ が存在して $f(X)$ の最小値となる. $\square$

§10. コンパクト性

定義 10.1 X を距離空間とする. A を X の部分集合, $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の開集合の族とする.

- (1) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ をみたすとき, $\mathcal{C}$ を A の**開被覆**という.
- (2) A の開被覆 $\mathcal{C}$ の部分族 $\mathcal{C}_0$ が A の開被覆になっているとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の**部分被覆**という.
- (3) 上の定義で, とくに $\mathcal{C}_0$ が $\mathcal{C}$ の有限部分族であるとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の**有限部分被覆**という.

すなわち, $\Lambda_0 \subset \Lambda$ で定まる $\mathcal{C}_0 = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ が A の開被覆であるとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の部分被覆といい, とくに Λ_0 が有限集合であるとき, 有限部分被覆というわけである.

定義 10.2 X を距離空間, A をその部分集合とする. A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつとき, A は**コンパクト**であるという. すなわち, A がコンパクトであるとは, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるような任意の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, $A \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ をみたす有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在することである.

補題 10.3 コンパクトな距離空間の開集合はコンパクトである.

証明 X をコンパクトな距離空間, A をその開集合とする. $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の任意の開被覆とすると, これに開集合 A^c を付け加えた $\{A^c\} \cup \mathcal{C}$ は X の開被覆である. X はコンパクトだから, 有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ がとれて $X = A^c \cup O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ をみたす (A^c がなくても X の開被覆になってるかもしれないが, その場合 A^c を加えても開被覆になっている). よって, $A \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ となり, A はコンパクトである. $\square$

補題 10.4 距離空間のコンパクトな部分集合は閉集合である.

証明 (X, d) を距離空間, A をそのコンパクトな部分集合とする. A が閉集合でないとする. 点 $x \in \bar{A} \setminus A$ がとれる. このような x をひとつ固定する. いま, $a \in A$ に対して, $a \neq x$ より $0 < \delta \leq d(a, x)/2$ のような δ がとれるが, このときあきらかに $U(a, \delta) \cap U(x, \delta) = \phi$, したがって $U(a, \delta) \subset U(x, \delta)^c$ が成り立つ. とくに, a

は $U(x, \delta)^c$ の内点 ($= U(x, \delta)$ の外点), すなわち $a \in (U(x, \delta)^c)^\circ$ を得る. よって, $\{(U(x, \delta)^c)^\circ \mid \delta > 0\}$ は A の開被覆である;

$$A \subset \bigcup_{\delta > 0} (U(x, \delta)^c)^\circ.$$

A はコンパクトだから, 有限個の $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ が存在して

$$A \subset (U(x, \delta_1)^c)^\circ \cup \dots \cup (U(x, \delta_n)^c)^\circ$$

とできる. いま, $\varepsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ とおくと, $x \in \bar{A}$ より, 点 $b \in U(x, \varepsilon) \cap A$ が存在し, さらに $b \in (U(x, \delta_i)^c)^\circ$ である δ_i ($1 \leq i \leq n$) がとれるが, このとき, $\delta_i \leq d(b, x) < \varepsilon \leq \delta_i$ となって矛盾する. $\square$

定理 10.5 有限個のコンパクト距離空間の直積空間はコンパクトである.

証明 2 個の場合, すなわち, 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ がどちらもコンパクトのとき, 直積空間 $(X \times Y, d)$ もコンパクトであることを示せばよい.

まず, $x \in X, y \in Y, \varepsilon > 0$ に対して, $X, Y, X \times Y$ における ε -近傍をそれぞれ $U_X(x, \varepsilon), U_Y(y, \varepsilon), U((x, y), \varepsilon)$ と記すことにすると, 距離 d の定義 (定義 5.3, 5.5) より

$$U_X(x, \varepsilon) \times U_Y(y, \varepsilon) \subset U((x, y), \varepsilon)$$

が成り立つことに注意する.

さて, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $X \times Y$ の任意の開被覆とする. いま, 各 $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $(x, y) \in O_{\lambda(x, y)}$ をみたす $\lambda(x, y) \in \Lambda$ をひとつずつとっておく. $O_{\lambda(x, y)}$ は開集合だから, ある $\varepsilon(x, y) > 0$ が存在して, $U((x, y), \varepsilon(x, y)) \subset O_{\lambda(x, y)}$, したがって

$$U_X(x, \varepsilon(x, y)) \times U_Y(y, \varepsilon(x, y)) \subset O_{\lambda(x, y)}.$$

ここで, 各 $x \in X$ に対して, $\{U_Y(y, \varepsilon(x, y)) \mid y \in Y\}$ は Y の開被覆だから, Y のコンパクト性より, ある自然数 $n(x)$ と $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n(x)}(x) \in Y$ が存在して

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n(x)} U_Y(y_j(x), \varepsilon(x, y_j(x))).$$

そこで, $\delta(x) = \min\{\varepsilon(x, y_j(x)) \mid j = 1, \dots, n(x)\}$ とおけば, $\{U_X(x, \delta(x)) \mid x \in X\}$ は X の開被覆で, X はコンパクトだから, 有限個の $x_1, \dots, x_m \in X$ がとれて

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_X(x_i, \delta(x_i)).$$

すべての $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n(x_i)$ に対して $\delta(x_i) \leq \varepsilon(x_i, y_j(x_i))$, よって

$$U_X(x_i, \delta(x_i)) \times U_Y(y_j(x_i), \varepsilon(x_i, y_j(x_i))) \subset O_{\lambda(x_i, y_j(x_i))},$$

が成り立つから

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n(x_i)} O_{\lambda(x_i, y_j(x_i))}$$

が得られ, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が有限部分被覆をもつことが示された. $\square$

定理 10.6 (ハイネ-ボレル) 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $[a, b]$ の任意の開被覆とする; $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$. いま, $a \leq x \leq b$ かつ有限個の O_λ で $[a, x]$ を覆うことができるような x 全体の集合を A とする. すなわち,

$$A = \left\{ x \in [a, b] \mid \text{有限個の } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \text{ が存在して } [a, x] \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i} \right\}.$$

このとき $b \in A$ を示せばよい. $a \in A$ より A は空でなく, かつ有界でもあるから, $c = \sup A$ が存在する. あきらかに $c \in [a, b]$ であるから, $c \in O_{\lambda_0}$ をみたす $\lambda_0 \in \Lambda$ がとれる. O_{λ_0} は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$. この ε に対して, 上限の定義から $c - \varepsilon < x \leq c$ であるような $x \in A$ が存在し, さらに, A の定義より, $[a, x] \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$ であるような有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ がとれる. そこで, $\delta = \min\{b - c, \varepsilon/2\}$ とおけば, $c - \varepsilon < x \leq c \leq c + \delta < c + \varepsilon$ より,

$$[a, c + \delta] \subset [a, x] \cup (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n} \cup O_{\lambda_0}$$

かつ $c + \delta \in [a, b]$ であるから, $c + \delta \in A$ を得る. しかし, c が A の上限だったので $\delta = 0$ でなければならない. したがって $b = c = c + \delta \in A$ が確かめられた. $\square$

定理 10.7 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について, A がコンパクトであるためには, A が有界閉集合であることが必要十分である.

証明 【必要性】 A がコンパクトであるとする. 補題 10.4 より A は閉集合であることは示されているから, 有界性を確かめればよい. 自然数 m に対する原点 $\mathbf{0}$ の m -近傍の族 $\{U(\mathbf{0}, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆だから, もちろん A の開被覆でもある. よって有限個の $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ がとれて,

$$A \subset U(\mathbf{0}, m_1) \cup \dots \cup U(\mathbf{0}, m_r)$$

となる. そこで, $M = \max\{m_1, \dots, m_r\}$ とおけば, $A \subset U(\mathbf{0}, M)$ をみたすから A は有界である.

【十分性】 A が有界閉集合であるとする. 有界性から, A は $\mathbb{R}$ の有界閉区間の直積 C に含まれる, すなわち $a_i < b_i$ をみたす実数 a_i, b_i が存在して

$$A \subset C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

このとき, 定理 10.6 と定理 10.5 より, C はコンパクトである. さらに A は閉集合 (正確には $\mathbb{R}^n$ の部分空間 C の閉集合) だから, 補題 10.3 よりコンパクトである. $\square$

定理 10.8 $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像で, X がコンパクトであるとする.

- (1) $f(X)$ もコンパクトである.
- (2) f が単射ならば, $f(X)$ と X は同相である.
- (3) f が全単射ならば, f は同相写像である.

証明 (1) Y の開集合の族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $f(X)$ の開被覆であるとする;

$$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda.$$

このとき, f は連続だから, 定理 6.8 より $f^{-1}(O_\lambda)$ はすべて X の開集合であり, かつ

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda),$$

すなわち, $\{f^{-1}(O_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトだから, 有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X = f^{-1}(O_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(O_{\lambda_n})$$

とできる. よって, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の有限部分被覆

$$f(X) = f(f^{-1}(O_{\lambda_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(O_{\lambda_n})) \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$$

が得られ, $f(X)$ がコンパクトであることが示された.

(2) f の単射性より, 写像 $g: f(X) \rightarrow X$ を $g = f^{-1}$ として自然に定義することができる. そこで, (2) を示すためには, g が連続であることがいえればよい. いま, A を X の任意の閉集合とすると, 補題 10.3 より A はコンパクト, よって (1) で示したように, $f(A)$ はコンパクトになるから, 補題 10.4 より閉集合である. すなわち, $f(A) = g^{-1}(A)$ が閉集合であるから, 定理 7.5 によって, g が連続であることがわかる.

(3) は (2) から直ちに導かれる. □

定理 10.9 空でないコンパクト距離空間上の実数値連続関数は, 最大値, 最小値をもつ.

証明 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ をコンパクト距離空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とすると, 前定理の (1) から $f(X)$ はコンパクトであり, さらに定理 10.7 より $f(X)$ は有界閉集合である. あとは, 定理 9.9 の証明と同様にすればよい. □

§11. 点列コンパクトとコンパクトの同値性

前々節では点列コンパクトに関する性質を、前節ではコンパクトに関する性質を紹介した。補題 9.3 における“点列コンパクト”を“コンパクト”に置き換えれば補題 10.3 になる。補題 9.4 と補題 10.4 にも同様の関係がある。さらに、点列コンパクトに関する定理 9.5～9.9 も、コンパクトに関する定理 10.5～10.9 とそれぞれ全く同じ事柄を主張している。

以上のことは、距離空間において、点列コンパクトとコンパクトは全く同じ概念であることを示唆している。実際、次の定理が成り立つ。

定理 11.1 距離空間 X の部分集合 A について、 A がコンパクトであるためには、 A が点列コンパクトであることが必要十分である。

ええ～、それじゃ、前節の証明ってやんなくてもよかったんじゃない？とおっしゃる方もいらっしゃることは重々理解しております。そこは、あれです、「教育的効果」ってやつですよ。それに、ひとつの命題に対して全く異なる複数の証明をすることで、その命題の数学的な理解が深まると言え、意味があると思うの。

まあ言い訳はこのくらいにして、定理の証明を始めましょう。

補題 11.2 X を距離空間とする。 X の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に属する集合が、互いに補集合の関係をもつとする。すなわち、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $F_\lambda = O_\lambda^c$ が成り立つとする。このとき、 X の部分集合 A に対して、次は同値である。

- (i) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ ならば、ある有限集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda$
- (ii) どの有限集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ についても $A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} F_\lambda \neq \emptyset$ ならば、 $A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$

証明 (i) の対偶をとれば、

$$\text{どの有限集合 } \Lambda_0 \subset \Lambda \text{ についても } A \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda \text{ ならば、} A \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

一般に、集合 S, T に対して、 $S \subset T \Leftrightarrow S^c \supset T^c$ および $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$ が成り立つから、上は

$$\text{どの有限集合 } \Lambda_0 \subset \Lambda \text{ についても } A^c \not\supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} F_\lambda \text{ ならば、} A^c \not\supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

と同値であり、これは (ii) そのものである。 □

一般に, ある集合 S の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は,

任意有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ ($r \geq 1$) に対して $T_{\lambda_1} \cap \dots \cap T_{\lambda_r} \neq \emptyset$

をみたすとき, **有限交差性をもつ**という. さらに S の部分集合 A に対して, 部分集合族 $\{A \cap T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が有限交差性をもつとき, すなわち

任意有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ ($r \geq 1$) に対して $A \cap T_{\lambda_1} \cap \dots \cap T_{\lambda_r} \neq \emptyset$

であるとき, $\mathcal{T}$ は A について**有限交差性をもつ**という.

補題 11.2 の性質 (ii) の仮定は, 閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が A について有限交差性をもつことを意味している.

命題 11.3 A を距離空間 X の部分集合とすると, 次は同値である.

(i) A はコンパクトである.

(ii) A について有限交差性をもつ X の任意の閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は,

$$A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$$

をみたす.

証明 A がコンパクトであるとは, 定義により, 任意の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 補題 11.2 の性質 (i) がなりたつことである. $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が X の任意の開集合族にわたるとき, $F_\lambda = O_\lambda^c$ によって与えられる集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の任意の閉集合族にわたる. よって, 補題 11.2 の同値性から, (i), (ii) の同値性が導かれる. $\square$

定理 11.1 必要性の証明 A がコンパクトであると仮定する. A 上の任意の点列 $\{x_n\}$ をとり, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_n = \{x_j \mid n < j\} = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

とおく. 有限個の $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ に対して, $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$ とすれば,

$$A \supset T_{n_1} \cap \dots \cap T_{n_r} = T_n \neq \emptyset$$

だから, 集合族 $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は A について有限交差性をもち, したがって, 閉集合族 $\{\overline{T_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ もまた A について有限交差性をもつ. よって前命題より,

$$A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{T_n} \neq \emptyset.$$

そこで, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in \overline{T_n}$ であるような $x \in A$ がとれる. いま, 自然数 n_1 を任意にとれば, $x \in \overline{T_{n_1}}$ より, $x_{n_2} \in T_{n_1} \cap U(x, 1/2)$ をみたす n_2 がとれる. とくに

$n_1 < n_2$ かつ $d(x_{n_2}, x) < 1/2$ となっている. 次に, $x \in \overline{T_{n_2}}$ より, $x_{n_3} \in T_{n_2} \cap U(x, 1/3)$ をみたく n_3 がとれて, $n_2 < n_3$ かつ $d(x_{n_3}, x) < 1/3$ が成り立つ. 同様にして, 各自然数 $j > 1$ に対して

$$n_{j-1} < n_j \quad \text{かつ} \quad d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{j}$$

をみたく n_j を順にとることができる. このとき $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) かつ $x \in A$, すなわち $\{x_n\}$ は A の元に収束する部分列をもつ. よって A は点列コンパクトである. $\square$

命題 11.4 A を距離空間 X の点列コンパクトな部分集合とし, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $x \in A$ に対して $U(x, \varepsilon) \subset O_\lambda$ をみたく $\lambda \in \Lambda$ がとれる.

証明 結論を否定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $x \in A$ が存在し, すべての $\lambda \in \Lambda$ について $U(x, \varepsilon) \not\subset O_\lambda$ となる. とくに, 各自然数 n について, $\varepsilon = 1/n$ に対してとれる $x \in A$ を x_n とすれば,

$$\text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ について, } U\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_\lambda.$$

ここで, A は点列コンパクトだから, 点列 $\{x_n\}$ は A の点 x に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. さらに, $x \in O_\lambda$ であるような λ をとると, O_λ は開集合だから, $U(x, \delta) \subset O_\lambda$ をみたく $\delta > 0$ が存在する. 一方, 定理 6.11 より, ある自然数 k がとれて, $k \leq j$ ならば $x_{n_j} \in U\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ となる. このとき $U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right) \subset O_\lambda$ が成り立つ. なぜなら, $y \in U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right)$ のとき,

$$d(y, x) \leq d(y, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

より $y \in U(x, \delta) \subset O_\lambda$ となるからである. 最後に, $\frac{1}{n_j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) より, $\frac{1}{n_j} \leq \frac{\delta}{2}$ をみたくように $j \geq k$ をとることができる. $U\left(x_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subset U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right) \subset O_\lambda$ が導かれて, x_n のとり方に矛盾する. $\square$

定理 11.1 十分性の証明 A が点列コンパクトであるとする. A がコンパクトでないと仮定して矛盾を導く. このとき, A の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で, 有限部分被覆をもたないものが存在する. すなわち, どんな有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ をとっても

$$A \not\subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_r}$$

となっている. $\mathcal{O}$ に対して, 前命題のような $\varepsilon > 0$ をひとつとって固定する. $x_1 \in A$ を任意にとる. このとき, $U(x_1, \varepsilon) \subset O_{\lambda_1}$ をみたく $\lambda_1 \in \Lambda$ がとれる. $\mathcal{O}$ は有限部分被覆をもたないので $A \not\subset O_{\lambda_1}$, よって $x_2 \notin O_{\lambda_1}$ をみたく $x_2 \in A$ がとれる. この x_2 に対

して, $U(x_2, \varepsilon) \subset O_{\lambda_2}$ をみたま $\lambda_2 \in \Lambda$ がとれるが, 再び $\mathcal{O}$ が有限部分被覆をもたないことから $A \not\subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2}$ なので, $x_3 \notin O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2}$ をみたま $x_3 \in A$ がとれる. 同様にして, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\lambda_n \in \Lambda$ および $x_n \in A$ がとれて

$$U(x_n, \varepsilon) \subset O_{\lambda_n} \quad \text{かつ} \quad x_n \notin O_{\lambda_j} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

をみたま. とくに $x_n \notin U(x_j, \varepsilon)$, したがって $d(x_j, x_n) \geq \varepsilon$ ($j = 1, \dots, n-1$) を得る. すなわち,

$$m < n \quad \text{ならば} \quad d(x_m, x_n) \geq \varepsilon.$$

さて, A は点列コンパクトだから, 点列 $\{x_n\}$ は A の点に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. とくに, $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) であるが, 一方で任意の j について, $n_j < n_{j+1}$ より, $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) \geq \varepsilon$ が成り立っているから矛盾する. $\square$

§12. 完備性

定義 12.1 (X, d) を距離空間とし, $\{x_n\}$ を X の点列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ は**コーシー列**であるという.

補題 12.2 距離空間の点列は, 収束するならばコーシー列である.

証明 $\{x_n\}$ が距離空間 (X, d) の点列で, $x \in X$ に収束しているとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ が成り立っている. よって, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ となり, これは点列 $\{x_n\}$ がコーシー列であることを示している. $\square$

例 12.3 補題の逆, すなわち「コーシー列ならば収束する」は一般には成り立たない.

(1) 実数上の区間 $(0, 1)$ の点列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ はコーシー列であるが, $(0, 1)$ において収束しない.

(2) $\mathbb{Q}$ の点列 $\{x_n\}$ を $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}$ で定めると, コーシー列ではあるが, $\mathbb{Q}$ では収束しない ($\mathbb{R}$ では収束し, その極限值はリウヴィル数とよばれる無理数である).

定義 12.4 X を距離空間とする. X の任意のコーシー列が収束するとき, X は**完備**であるという. X の部分集合 A は, 部分空間として完備であるとき, 完備であるという.

命題 12.5 X を完備距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, A が完備であることと, A が閉集合であることは同値である.

証明 完備 $\Rightarrow$ 閉: A が完備であるとする. A の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束しているとする. 補題 12.2 より $\{x_n\}$ はコーシー列だが, A は完備なので A において収束し, したがって $x \in A$ でなければならない. よって, 定理 7.6 より, A は閉集合である.

閉 $\Rightarrow$ 完備: A が閉集合であるとする. $\{x_n\}$ を A のコーシー列とする. X の完備性より, $\{x_n\}$ は X の点 x に収束するが, A が閉集合なので, 定理 7.6 より, $x \in A$ が成り立ち, A が完備であることが確かめられた. $\square$

定理 12.6 有限個の完備距離空間の直積空間は完備である.

証明 2 個の場合, すなわち, 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ がどちらも完備のとき, 直積空間 $(X \times Y, d)$ も完備であることを示せばよい. $X \times Y$ のコーシー列 $\{p_n\}$ を任意にとる. 各 p_n を成分で表し $p_n = (x_n, y_n)$ ($x_n \in X, y_n \in Y$) とすると,

$$d_X(x_m, x_n) \leq d_X(x_m, x_n) + d_Y(y_m, y_n) = d(p_m, p_n)$$

より, $\{x_n\}$ は X のコーシー列であることが確かめられ, X は完備であるという仮定から, $\{x_n\}$ は収束する. 同様に, $\{y_n\}$ も収束し, したがって, $\{p_n\}$ は収束するから, $X \times Y$ は完備である. $\square$

距離空間において, 完備性は, コンパクト性, 点列コンパクト性と密接な関係にある. その関係を見るために, 次の定義を導入する.

定義 12.7 X を距離空間とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, X の有限個の点 $x_1, \dots, x_n$ がとれて, $X = U(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U(x_n, \varepsilon)$ とできるとき, X は**全有界**であるという.

注意 全有界な距離空間は有界である. (なぜなら, $\varepsilon = 1$ に対して, x_i を上の定義のようにとったとき, $M = \max\{d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ と定めておけば, 任意の x, y に対して, $x \in U(x_i, 1), y \in U(x_j, 1)$ である x_i, x_j をとって,

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 1 + M + 1 = M + 2$$

が得られるからである.) しかし, その逆は一般には成り立たない. (無限個の点をもつ離散距離空間は, 有界であるが全有界ではない. だって, どんな点 x をとっても $U(x, 1/2) = \{x\}$ だもん.)

定理 12.8 距離空間 X について, 次は同値である.

- (i) X はコンパクトである.
- (ii) X は点列コンパクトである.
- (iii) X は完備かつ全有界である.

証明 (i) と (ii) が同値であることは定理 11.1 で示されているので,

$$(i) \Rightarrow \text{全有界であること}, \quad (ii) \Rightarrow \text{完備であること}, \quad (iii) \Rightarrow (ii)$$

のそれぞれを証明すればよい.

(i)⇒全有界であること: $\varepsilon > 0$ を任意にとったとき,

$$X = \bigcup_{x \in X} U(x, \varepsilon)$$

が明らかに成り立つので, X のコンパクト性より, 有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ がとれて $X = U(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U(x_n, \varepsilon)$ とできる. したがって X は全有界である.

(ii)⇒完備であること: X の任意のコーシー列 $\{x_n\}$ をとる. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ とできる. 一方, X は点列コンパクトだから, $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. いま, $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすれば, 上で選んだ ε に対して, $J \in \mathbb{N}$ が存在して, $J \leq j$ ならば $d(x_{n_j}, x) < \varepsilon/2$ とできる. そこで, $K = \max\{N, J\}$ とおけば, $K \leq k$ のとき, $N \leq k \leq n_k$ より $d(x_k, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ であり, さらに $J \leq k$ より $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$, よって

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) であり, X の完備性が確かめられた.

(iii)⇒(ii): まず, X が全有界なので, 自然数 j に対して, 有限集合 $A_j \subset X$ が存在して

$$X = \bigcup_{a \in A_j} U\left(a, \frac{1}{j}\right)$$

とできる. このような有限集合 $A_j \subset X$ を各 $j \in \mathbb{N}$ に対してひとつずつとって固定しておく. いま, X の任意の点列 $\{x_n\}$ をとる. このとき, ある $a_1 \in A_1$ に対しては, $x_n \in U(a_1, 1)$ である $n \in \mathbb{N}$ が無限個とれる. なぜなら, すべての $a \in A_1$ について $x_n \in U(a, 1)$ である n が有限個だとすると, A_1 の有限性から, $\mathbb{N}$ も有限集合となって矛盾するからである. このとき

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U(a_1, 1)\}$$

と定めれば, N_1 は無限集合である. 同様の議論により, $j \geq 2$ に対して順に, A_j の有限性と N_{j-1} の無限性から,

$$N_j = \left\{ n \in N_{j-1} \mid x_n \in U\left(a_j, \frac{1}{j}\right) \right\}$$

が無限集合になるように $a_j \in A_j$ をとることができる. このようにして $\mathbb{N}$ の減少部分集合族を得る;

$$\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$$

いま, N_j はすべて無限集合なので, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ をみたすように $n_j \in N_j$ がとれる. このとき $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}$ はコーシー列である. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $m \varepsilon \geq 2$ のような自然数 m をとれば, $m \leq j, k$ のとき, $n_j \in N_j \subset N_m$ かつ $n_k \in N_k \subset N_m$ より, $x_{n_j}, x_{n_k} \in U\left(a_m, \frac{1}{m}\right)$, したがって,

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_j}, a_m) + d(a_m, x_{n_k}) < \frac{2}{m} \leq \varepsilon$$

となることから, $\{x_{n_j}\}$ がコーシー列であることがわかる. さらに X は完備であったから $\{x_{n_j}\}$ は収束する. 以上より, X が点列コンパクトであることが示された. $\square$

同相写像によって (点列) コンパクト性は保たれる (定理 9.8, 定理 10.8). しかし, 完備性は同相写像では必ずしも保たれない. たとえば, $\mathbb{R}$ は完備であるが, それと同相である开区間 $(0, 1)$ は完備ではない. したがって, 完備性を保つ写像を特徴づけるには, より強い条件を付加する必要がある.

定義 12.9 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が下記の (*) をみたすとき, f は**一様連続**であるという.

$$(*) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ d_X(x_1, x_2) < \delta \text{ であるすべての } x_1, x_2 \in X \text{ について } d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

とくに f が全単射で, f も f^{-1} も一様連続であるとき, f は**一様同値写像**であるという. X から Y への一様同値写像が存在するとき, X と Y は**一様同値**であるという.

注意 一様連続写像は連続写像であり, 一様同値写像は同相写像である.

補題 12.10 $f: X \rightarrow Y$ が距離空間の間の一様連続写像のとき, $\{x_n\}$ が X のコーシー列ならば, $\{f(x_n)\}$ は Y のコーシー列である.

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. まず, f が一様連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して, $x, x' \in X$ が $d_X(x, x') < \delta$ をみたすならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる. さらに, $\{x_n\}$ がコーシー列なので, この $\delta > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ がとれて, $N \leq m, n$ ならば $d_X(x_m, x_n) < \delta$ となり, 結局 $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ が成り立つ. このことは, $\{f(x_n)\}$ がコーシー列であることを示している. $\square$

定理 12.11 距離空間 X, Y が一様同値であるとき, X が完備ならば, Y も完備である.

証明 一様同値写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する. このとき, f およびその逆写像 $g = f^{-1}$ も一様連続である. Y のコーシー列 $\{y_n\}$ を任意にとると, 前補題から $\{g(y_n)\}$ は X のコーシー列である. X は完備なので, $\{g(y_n)\}$ は X の点 x に収束する. すなわち $g(y_n) \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). f の連続性から, $y_n = f(g(y_n)) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), よって $\{y_n\}$ は収束し, Y の完備性が示された. $\square$

§13. 連結性

定義 13.1 X を距離空間とする. 共通部分のない空でない開集合 O_1, O_2 が存在して, $X = O_1 \cup O_2$ が成り立つとき, X は**非連結**であるという. 非連結でないとき, X は**連結**であるという. すなわち, X が連結であるとは, X の開集合 O_1, O_2 について

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \neq \phi, \quad O_2 \neq \phi \quad \text{ならば} \quad O_1 \cap O_2 \neq \phi$$

となることである. X の部分集合 A についても, 部分距離空間として非連結, 連結を定義する. すなわち, A が連結であるとは, X の開集合 O_1, O_2 について

$$A \subset O_1 \cup O_2, \quad A \cap O_1 \neq \phi, \quad A \cap O_2 \neq \phi \quad \text{ならば} \quad A \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$$

となることである.

例 13.2 空集合 ϕ は連結, さらに元をひとつしかもたない集合も連結である. 2 個以上の元をもつ有限集合は, 距離空間とみなすとき非連結である. 実際, 例 3.6 で見たように, 空でない有限集合 S は離散距離空間と考えることができるから, S のすべての部分集合は開集合である. 2 個以上の元をもてば, $\phi \subsetneq O \subsetneq S$ をみたす部分集合 O がとれ, $S = O \cup (S \setminus O)$ と表されることがから, S は非連結であることがわかる.

命題 13.3 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ は連結である.

証明 $[a, b] \subset O_1 \cup O_2$ であるような $\mathbb{R}$ の開集合 O_1, O_2 で, $[a, b] \cap O_1 \neq \phi$ かつ $[a, b] \cap O_2 \neq \phi$ をみたすものをとる. このとき, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ を示せばよい. 必要なら番号を付け替えて, $a \in O_1$ であるとしてよい. いま, $a \leq x \leq b$ かつ $[a, x] \subset O_1$ をみたす x 全体の集合を A とする. すなわち,

$$A = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subset O_1\}.$$

$a \in A$ より A は空でなくかつ有界でもあるから, $c = \sup A$ が存在する. ここで $c \in [a, b]$ であるから, $c \in O_1$ または $c \in O_2$ が成り立つ. まず, $c \in O_2$ のとき, O_2 は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_2$. この ε に対して, 上限の定義から $c - \varepsilon < x \leq c$ であるような $x \in A$ が存在し, $[a, x] \subset O_1$, よって $x \in O_1 \cap U(c, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ であり, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ が導かれた. 次に, $c \in O_1$ のとき, ある $\varepsilon' > 0$ がとれて $(c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset O_1$ であるが, 上限の定義から $c - \varepsilon' < x' \leq c$ である $x' \in A$ が存在し, $[a, x'] \subset O_1$. そこで, $\delta = \min\{b - c, \varepsilon'/2\}$ とおけば, $c - \varepsilon' < x' \leq c \leq c + \delta < c + \varepsilon'$ より,

$$[a, c + \delta] \subset [a, x'] \cup (c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset O_1$$

かつ $c + \delta \in [a, b]$ であるから, $c + \delta \in A$ を得る. しかし, c が A の上限だったので $\delta = 0$ でなければならない. したがって $b = c = c + \delta \in A$, よって $[a, b] \subset O_1$ を得る. このことから, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 = [a, b] \cap O_2 \neq \phi$ が成り立ち, 証明が完了する. $\square$

定理 13.4 X, Y を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X が連結ならば $f(Y)$ も連結である.

証明 Y の開集合 O_1, O_2 が,

$$f(X) \subset O_1 \cup O_2, \quad f(X) \cap O_1 \neq \phi, \quad f(X) \cap O_2 \neq \phi$$

をみたすとする. $U_1 = f^{-1}(O_1), U_2 = f^{-1}(O_2)$ とおくと,

$$X = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \neq \phi, \quad U_2 \neq \phi$$

が確かめられる. ここで, f は連続なので, 定理 6.8 より U_1, U_2 は X の開集合である. よって, X の連結性より $U_1 \cap U_2 \neq \phi$ でなければならない. このことから $f(X) \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ が得られ, $f(X)$ が連結であることが示された. $\square$

命題 13.5 距離空間 X が連結であるためには, X から $\{0, 1\}$ への任意の連続写像が定数関数であることが必要十分である.

証明 必要性: $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. もし, f が定数関数でないとすると $f(X) = \{0, 1\}$ であるが, X は連結で $\{0, 1\}$ は非連結なので前定理に矛盾する. よって f は定数関数である.

十分性: $X = O_0 \cup O_1$ かつ $O_0 \cap O_1 = \phi$ をみたす開集合 O_0, O_1 をとる. このとき, 写像 $g: X \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \in O_0) \\ 1 & (x \in O_1) \end{cases}$$

で定義することが可能である. ここで, $O_0 = g^{-1}(0), O_1 = g^{-1}(1)$ は開集合だから, 定理 6.8 より g は連続, したがって仮定より定数関数である. よって, $O_0 = \phi$ または $O_1 = \phi$ でなくてはならない. このことは X が連結であることを示している. $\square$

定理 13.6 X を距離空間, A をその連結な部分集合とする. このとき $A \subset B \subset \overline{A}$ をみたす B は連結である.

証明 $f: B \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. 前命題によって, 任意の $x, y \in B$ に対して $f(x) = f(y)$ を示せばよい. いま, $x \in B = \overline{A}$ より, A の点列 $\{x_n\}$ がとれて $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) とできる. 同様に, A の点列 $\{y_n\}$ で $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) であるものがとれる. ここで, f の A への制限 $f|_A: A \rightarrow \{0, 1\}$ も連続写像であり, よって前命題より f は A 上で一定の値をとるから, $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(y_1) = f(y_2) = \cdots$, したがって $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y)$ が成り立ち, 証明が完了する. $\square$

定理 13.7 X を距離空間とし, $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の連結な部分集合族とする. 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ が成り立つならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結である.

証明 $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とおき, $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. いま, 任意の $x, y \in A$ に対して, $x \in A_\lambda, y \in A_\mu$ をみたす $\lambda, \mu \in \Lambda$ がとれて, さらに仮定より, 点 $z \in A_\lambda \cap A_\mu$ が存在する. ここで, f の A_λ への制限も連続なので, A_λ の連結性と命題 13.5 より, f は A_λ 上では一定の値をとるから, $f(x) = f(z)$. 同様に, f は A_μ 上でも一定の値をとるから, $f(y) = f(z)$. よって $f(x) = f(y)$ を得る. したがって f は A 上の定数関数であり, 命題 13.5 より A は連結である. $\square$

定理 13.8 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して, 次は同値である.

- (i) A は連結である.
- (ii) A は区間である. すなわち, A は次のいずれかに一致する;

$$[a, b], \quad (a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b)$$

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 対偶を示すために, A が区間でなかったとする. このとき, $x < y < z$ かつ $x, z \in A$ で $y \notin A$ であるような実数 x, y, z が存在する. $O_1 = (-\infty, y), O_2 = (y, \infty)$ とおくと, これらは共通部分のない開集合である. また, $O_1 \cup O_2 = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ だから $A \subset O_1 \cup O_2$ であり, さらに $x \in A \cap O_1, z \in A \cap O_2$ より $A \cap O_1 \neq \emptyset, A \cap O_2 \neq \emptyset$. したがって A は非連結となり, 対偶が示された.

(ii) $\Rightarrow$ (i): まず A が有界区間 $[a, b], (a, b], [a, b), (a, b)$ のときを考える. $a \geq b$ のときは, 1 点集合または空集合になるから, 例 13.2 で見たように連結である. よって $a < b$ とする. 閉区間 $[a, b]$ については命題 13.3 で示した. とくに, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ である任意の ε に対して $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ も連結である. よって

$$(a, b) = \bigcup_{0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}} [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$$

であることに注意すれば, 定理 13.7 より (a, b) も連結である. さらに, (a, b) の閉包は $[a, b]$ だから, 定理 13.6 より $(a, b]$ も $[a, b)$ も連結である. A が有界でない区間の場合も, $(a, \infty) = \bigcup_{a < x} (a, x)$ などに定理 13.7 を適用して連結性が確かめられる. $\square$

系 13.9 (中間値の定理) X を連結距離空間, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とし, $x, y \in X$ が $f(x) < f(y)$ をみたしているとする. このとき, $f(x) < c < f(y)$ である任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(z) = c$ をみたす $z \in X$ が存在する.

証明 定理 13.4 より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の連結な部分集合であるから、定理 13.8 により区間である。よって $f(x) < c < f(y)$ ならば $c \in f(X)$ であり結論を得る。 $\square$

定理 13.10 有限個の連結距離空間の直積空間は連結である。

証明 2 個の場合、すなわち、距離空間 X, Y がどちらも連結であるとき、直積空間 $X \times Y$ も連結であることを示せばよい。 X または Y が空集合の場合、 $X \times Y$ も空集合、したがって連結である。そこで、以下、 X, Y は空でない連結距離空間とする。いま、 $y \in Y$ に対して、写像

$$f_y : X \longrightarrow X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$$

は連続、したがって定理 13.4 より、 $f_y(X) = X \times \{y\}$ は連結である。同様に、 $x \in X$ に対して、写像

$$g_x : Y \longrightarrow X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$$

を定めれば、 $g_x(Y) = \{x\} \times Y$ は連結である。また、 $(x, y) \in f_y(X) \cap g_x(Y)$ なので、定理 13.7 より $f_y(X) \cup g_x(Y)$ は連結である。さらに、

$$X \times Y = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (f_y(X) \cup g_x(Y))$$

が成り立っていて、任意の $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して、

$$(f_y(X) \cup g_x(Y)) \cap (f_{y'}(X) \cup g_{x'}(Y)) \ni (x, y), (x', y')$$

が確かめられるから、再び定理 13.7 を適用して、 $X \times Y$ は連結である。 $\square$

系 13.11 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は連結である。

系 13.12 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相ではない。

証明 もし同相だとすると、同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。 $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $p = f((0, 0))$ とおくと、 $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, \infty)$ は区間ではない。一方、 A は $S^1 \times (0, \infty)$ と同相であり、 S^1 と $(0, \infty)$ は連結だから、定理 13.10 より A も連結である。よって、定理 13.4 より $f(A)$ は連結であり、さらに定理 13.8 から区間でなければならず矛盾である。 $\square$