

§13. 連結性

定義 13.1 X を距離空間とする. 共通部分のない空でない開集合 O_1, O_2 が存在して, $X = O_1 \cup O_2$ が成り立つとき, X は**非連結**であるという. 非連結でないとき, X は**連結**であるという. すなわち, X が連結であるとは, X の開集合 O_1, O_2 について

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \neq \phi, \quad O_2 \neq \phi \quad \text{ならば} \quad O_1 \cap O_2 \neq \phi$$

となることである. X の部分集合 A についても, 部分距離空間として非連結, 連結を定義する. すなわち, A が連結であるとは, X の開集合 O_1, O_2 について

$$A \subset O_1 \cup O_2, \quad A \cap O_1 \neq \phi, \quad A \cap O_2 \neq \phi \quad \text{ならば} \quad A \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$$

となることである.

例 13.2 空集合 ϕ は連結, さらに元をひとつしかもたない集合も連結である. 2 個以上の元をもつ有限集合は, 距離空間とみなすとき非連結である. 実際, 例 3.6 で見たように, 空でない有限集合 S は離散距離空間と考えることができるから, S のすべての部分集合は開集合である. 2 個以上の元をもてば, $\phi \subsetneq O \subsetneq S$ をみたす部分集合 O がとれ, $S = O \cup (S \setminus O)$ と表されることから, S は非連結であることがわかる.

命題 13.3 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ は連結である.

証明 $[a, b] \subset O_1 \cup O_2$ であるような $\mathbb{R}$ の開集合 O_1, O_2 で, $[a, b] \cap O_1 \neq \phi$ かつ $[a, b] \cap O_2 \neq \phi$ をみたすものをとる. このとき, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ を示せばよい. 必要なら番号を付け替えて, $a \in O_1$ であるとしてよい. いま, $a \leq x \leq b$ かつ $[a, x] \subset O_1$ をみたす x 全体の集合を A とする. すなわち,

$$A = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \subset O_1\}.$$

$a \in A$ より A は空でなくかつ有界でもあるから, $c = \sup A$ が存在する. ここで $c \in [a, b]$ であるから, $c \in O_1$ または $c \in O_2$ が成り立つ. まず, $c \in O_2$ のとき, O_2 は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_2$. この ε に対して, 上限の定義から $c - \varepsilon < x \leq c$ であるような $x \in A$ が存在し, $[a, x] \subset O_1$, よって $x \in O_1 \cap U(c, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ であり, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ が導かれた. 次に, $c \in O_1$ のとき, ある $\varepsilon' > 0$ がとれて $(c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset O_1$ であるが, 上限の定義から $c - \varepsilon' < x' \leq c$ である $x' \in A$ が存在し, $[a, x'] \subset O_1$. そこで, $\delta = \min\{b - c, \varepsilon'/2\}$ とおけば, $c - \varepsilon' < x' \leq c \leq c + \delta < c + \varepsilon'$ より,

$$[a, c + \delta] \subset [a, x'] \cup (c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset O_1$$

かつ $c + \delta \in [a, b]$ であるから, $c + \delta \in A$ を得る. しかし, c が A の上限だったので $\delta = 0$ でなければならない. したがって $b = c = c + \delta \in A$, よって $[a, b] \subset O_1$ を得る. このことから, $[a, b] \cap O_1 \cap O_2 = [a, b] \cap O_2 \neq \phi$ が成り立ち, 証明が完了する. $\square$

定理 13.4 X, Y を距離空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X が連結ならば $f(Y)$ も連結である.

証明 Y の開集合 O_1, O_2 が,

$$f(X) \subset O_1 \cup O_2, \quad f(X) \cap O_1 \neq \phi, \quad f(X) \cap O_2 \neq \phi$$

をみたすとする. $U_1 = f^{-1}(O_1), U_2 = f^{-1}(O_2)$ とおくと,

$$X = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \neq \phi, \quad U_2 \neq \phi$$

が確かめられる. ここで, f は連続なので, 定理 6.8 より U_1, U_2 は X の開集合である. よって, X の連結性より $U_1 \cap U_2 \neq \phi$ でなければならない. このことから $f(X) \cap O_1 \cap O_2 \neq \phi$ が得られ, $f(X)$ が連結であることが示された. $\square$

命題 13.5 距離空間 X が連結であるためには, X から $\{0, 1\}$ への任意の連続写像が定数関数であることが必要十分である.

証明 必要性: $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. もし, f が定数関数でないとすると $f(X) = \{0, 1\}$ であるが, X は連結で $\{0, 1\}$ は非連結なので前定理に矛盾する. よって f は定数関数である.

十分性: $X = O_0 \cup O_1$ かつ $O_0 \cap O_1 = \phi$ をみたす開集合 O_0, O_1 をとる. このとき, 写像 $g: X \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \in O_0) \\ 1 & (x \in O_1) \end{cases}$$

で定義することが可能である. ここで, $O_0 = g^{-1}(0), O_1 = g^{-1}(1)$ は開集合だから, 定理 6.8 より g は連続, したがって仮定より定数関数である. よって, $O_0 = \phi$ または $O_1 = \phi$ でなくてはならない. このことは X が連結であることを示している. $\square$

定理 13.6 X を距離空間, A をその連結な部分集合とする. このとき $A \subset B \subset \overline{A}$ をみたす B は連結である.

証明 $f: B \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. 前命題によって, 任意の $x, y \in B$ に対して $f(x) = f(y)$ を示せばよい. いま, $x \in B = \overline{A}$ より, A の点列 $\{x_n\}$ がとれて $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) とできる. 同様に, A の点列 $\{y_n\}$ で $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$) であるものがとれる. ここで, f の A への制限 $f|_A: A \rightarrow \{0, 1\}$ も連続写像であり, よって前命題より f は A 上で一定の値をとるから, $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(y_1) = f(y_2) = \cdots$, したがって $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y)$ が成り立ち, 証明が完了する. $\square$

定理 13.7 X を距離空間とし, $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の連結な部分集合族とする. 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ が成り立つならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結である.

証明 $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とおき, $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. いま, 任意の $x, y \in A$ に対して, $x \in A_\lambda, y \in A_\mu$ をみたす $\lambda, \mu \in \Lambda$ がとれて, さらに仮定より, 点 $z \in A_\lambda \cap A_\mu$ が存在する. ここで, f の A_λ への制限も連続なので, A_λ の連結性と命題 13.5 より, f は A_λ 上では一定の値をとるから, $f(x) = f(z)$. 同様に, f は A_μ 上でも一定の値をとるから, $f(y) = f(z)$. よって $f(x) = f(y)$ を得る. したがって f は A 上の定数関数であり, 命題 13.5 より A は連結である. $\square$

定理 13.8 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して, 次は同値である.

- (i) A は連結である.
- (ii) A は区間である. すなわち, A は次のいずれかに一致する;

$$[a, b], \quad (a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b)$$

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 対偶を示すために, A が区間でなかったとする. このとき, $x < y < z$ かつ $x, z \in A$ で $y \notin A$ であるような実数 x, y, z が存在する. $O_1 = (-\infty, y), O_2 = (y, \infty)$ とおくと, これらは共通部分のない開集合である. また, $O_1 \cup O_2 = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ だから $A \subset O_1 \cup O_2$ であり, さらに $x \in A \cap O_1, z \in A \cap O_2$ より $A \cap O_1 \neq \emptyset, A \cap O_2 \neq \emptyset$. したがって A は非連結となり, 対偶が示された.

(ii) $\Rightarrow$ (i): まず A が有界区間 $[a, b], (a, b], [a, b), (a, b)$ のときを考える. $a \geq b$ のときは, 1 点集合または空集合になるから, 例 13.2 で見たように連結である. よって $a < b$ とする. 閉区間 $[a, b]$ については命題 13.3 で示した. とくに, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ である任意の ε に対して $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ も連結である. よって

$$(a, b) = \bigcup_{0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}} [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$$

であることに注意すれば, 定理 13.7 より (a, b) も連結である. さらに, (a, b) の閉包は $[a, b]$ だから, 定理 13.6 より $(a, b]$ も $[a, b)$ も連結である. A が有界でない区間の場合も, $(a, \infty) = \bigcup_{a < x} (a, x)$ などに定理 13.7 を適用して連結性が確かめられる. $\square$

系 13.9 (中間値の定理) X を連結距離空間, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とし, $x, y \in X$ が $f(x) < f(y)$ をみたしているとする. このとき, $f(x) < c < f(y)$ である任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $f(z) = c$ をみたす $z \in X$ が存在する.

証明 定理 13.4 より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の連結な部分集合であるから、定理 13.8 により区間である。よって $f(x) < c < f(y)$ ならば $c \in f(X)$ であり結論を得る。□

定理 13.10 有限個の連結距離空間の直積空間は連結である。

証明 2 個の場合、すなわち、距離空間 X, Y がどちらも連結であるとき、直積空間 $X \times Y$ も連結であることを示せばよい。 X または Y が空集合の場合、 $X \times Y$ も空集合、したがって連結である。そこで、以下、 X, Y は空でない連結距離空間とする。いま、 $y \in Y$ に対して、写像

$$f_y : X \longrightarrow X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$$

は連続、したがって定理 13.4 より、 $f_y(X) = X \times \{y\}$ は連結である。同様にして、 $x \in X$ に対して、写像

$$g_x : Y \longrightarrow X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$$

を定めれば、 $g_x(Y) = \{x\} \times Y$ は連結である。また、 $(x, y) \in f_y(X) \cap g_x(Y)$ なので、定理 13.7 より $f_y(X) \cup g_x(Y)$ は連結である。さらに、

$$X \times Y = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (f_y(X) \cup g_x(Y))$$

が成り立っていて、任意の $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して、

$$(f_y(X) \cup g_x(Y)) \cap (f_{y'}(X) \cup g_{x'}(Y)) \ni \{(x, y'), (x', y)\}$$

が確かめられるから、再び定理 13.7 を適用して、 $X \times Y$ は連結である。□

系 13.11 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は連結である。

系 13.12 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相ではない。

証明 もし同相だとすると、同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。 $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $p = f((0, 0))$ とおくと、 $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, \infty)$ は区間ではない。一方、 A は $S^1 \times (0, \infty)$ と同相であり、 S^1 と $(0, \infty)$ は連結だから、定理 13.10 より A も連結である。よって、定理 13.4 より $f(A)$ は連結であり、さらに定理 13.8 から区間でなければならず矛盾である。□