

§12. 完備性

定義 12.1 (X, d) を距離空間とし, $\{x_n\}$ を X の点列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ は**コーシー列**であるという.

補題 12.2 距離空間の点列は, 収束するならばコーシー列である.

証明 $\{x_n\}$ が距離空間 (X, d) の点列で, $x \in X$ に収束しているとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ が成り立っている. よって, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ となり, これは点列 $\{x_n\}$ がコーシー列であることを示している. $\square$

例 12.3 補題の逆, すなわち「コーシー列ならば収束する」は一般には成り立たない.

(1) 実数上の区間 $(0, 1)$ の点列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ はコーシー列であるが, $(0, 1)$ において収束しない.

(2) $\mathbb{Q}$ の点列 $\{x_n\}$ を $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}$ で定めと, コーシー列ではあるが, $\mathbb{Q}$ では収束しない ($\mathbb{R}$ では収束し, その極限值はリウヴィル数とよばれる無理数である).

定義 12.4 X を距離空間とする. X の任意のコーシー列が収束するとき, X は**完備**であるという. X の部分集合 A は, 部分空間として完備であるとき, 完備であるという.

命題 12.5 X を完備距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, A が完備であることと, A が閉集合であることは同値である.

証明 完備 $\Rightarrow$ 閉: A が完備であるとする. A の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束しているとする. 補題 12.2 より $\{x_n\}$ はコーシー列だが, A は完備なので A において収束し, したがって $x \in A$ でなければならない. よって, 定理 7.6 より, A は閉集合である.

閉 $\Rightarrow$ 完備: A が閉集合であるとする. $\{x_n\}$ を A のコーシー列とする. X の完備性より, $\{x_n\}$ は X の点 x に収束するが, A が閉集合なので, 定理 7.6 より, $x \in A$ が成り立ち, A が完備であることが確かめられた. $\square$

定理 12.6 有限個の完備距離空間の直積空間は完備である.

証明 2 個の場合, すなわち, 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ がどちらも完備のとき, 直積空間 $(X \times Y, d)$ も完備であることを示せばよい. $X \times Y$ のコーシー列 $\{p_n\}$ を任意にとる. 各 p_n を成分で表し $p_n = (x_n, y_n)$ ($x_n \in X, y_n \in Y$) とすると,

$$d_X(x_m, x_n) \leq d_X(x_m, x_n) + d_Y(y_m, y_n) = d(p_m, p_n)$$

より, $\{x_n\}$ は X のコーシー列であることが確かめられ, X は完備であるという仮定から, $\{x_n\}$ は収束する. 同様に, $\{y_n\}$ も収束し, したがって, $\{p_n\}$ は収束するから, $X \times Y$ は完備である. $\square$

距離空間において, 完備性は, コンパクト性, 点列コンパクト性と密接な関係にある. その関係を見るために, 次の定義を導入する.

定義 12.7 X を距離空間とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, X の有限個の点 $x_1, \dots, x_n$ がとれて, $X = U(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U(x_n, \varepsilon)$ とできるとき, X は**全有界**であるという.

注意 全有界な距離空間は有界である. (なぜなら, $\varepsilon = 1$ に対して, x_i を上の定義のようにとったとき, $M = \max\{d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ と定めておけば, 任意の x, y に対して, $x \in U(x_i, 1), y \in U(x_j, 1)$ である x_i, x_j をとって,

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 1 + M + 1 = M + 2$$

が得られるからである.) しかし, その逆は一般には成り立たない. (無限個の点をもつ離散距離空間は, 有界であるが全有界ではない. だって, どんな点 x をとっても $U(x, 1/2) = \{x\}$ だもん.)

定理 12.8 距離空間 X について, 次は同値である.

- (i) X はコンパクトである.
- (ii) X は点列コンパクトである.
- (iii) X は完備かつ全有界である.

証明 (i) と (ii) が同値であることは定理 11.1 で示されているので,

$$(i) \Rightarrow \text{全有界であること}, \quad (ii) \Rightarrow \text{完備であること}, \quad (iii) \Rightarrow (ii)$$

のそれぞれを証明すればよい.

(i)⇒全有界であること: $\varepsilon > 0$ を任意にとったとき,

$$X = \bigcup_{x \in X} U(x, \varepsilon)$$

が明らかに成り立つので, X のコンパクト性より, 有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ がとれて $X = U(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup U(x_n, \varepsilon)$ とできる. したがって X は全有界である.

(ii)⇒完備であること: X の任意のコーシー列 $\{x_n\}$ をとる. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \leq m, n$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ とできる. 一方, X は点列コンパクトだから, $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. いま, $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすれば, 上で選んだ ε に対して, $J \in \mathbb{N}$ が存在して, $J \leq j$ ならば $d(x_{n_j}, x) < \varepsilon/2$ とできる. そこで, $K = \max\{N, J\}$ とおけば, $K \leq k$ のとき, $N \leq k \leq n_k$ より $d(x_k, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ であり, さらに $J \leq k$ より $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$, よって

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) であり, X の完備性が確かめられた.

(iii)⇒(ii): まず, X が全有界なので, 自然数 j に対して, 有限集合 $A_j \subset X$ が存在して

$$X = \bigcup_{a \in A_j} U\left(a, \frac{1}{j}\right)$$

とできる. このような有限集合 $A_j \subset X$ を各 $j \in \mathbb{N}$ に対してひとつずつとって固定しておく. いま, X の任意の点列 $\{x_n\}$ をとる. このとき, ある $a_1 \in A_1$ に対しては, $x_n \in U(a_1, 1)$ である $n \in \mathbb{N}$ が無限個とれる. なぜなら, すべての $a \in A_1$ について $x_n \in U(a, 1)$ である n が有限個だとすると, A_1 の有限性から, $\mathbb{N}$ も有限集合となって矛盾するからである. このとき

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U(a_1, 1)\}$$

と定めれば, N_1 は無限集合である. 同様の議論により, $j \geq 2$ に対して順に, A_j の有限性と N_{j-1} の無限性から,

$$N_j = \left\{n \in N_{j-1} \mid x_n \in U\left(a_j, \frac{1}{j}\right)\right\}$$

が無限集合になるように $a_j \in A_j$ をとることができる. このようにして $\mathbb{N}$ の減少部分集合族を得る;

$$\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$$

いま, N_j はすべて無限集合なので, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ をみたすように $n_j \in N_j$ がとれる. このとき $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}$ はコーシー列である. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $m\varepsilon \geq 2$ のような自然数 m をとれば, $m \leq j, k$ のとき, $n_j \in N_j \subset N_m$ かつ $n_k \in N_k \subset N_m$ より, $x_{n_j}, x_{n_k} \in U\left(a_m, \frac{1}{m}\right)$, したがって,

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_j}, a_m) + d(a_m, x_{n_k}) < \frac{2}{m} \leq \varepsilon$$

となることから, $\{x_{n_j}\}$ がコーシー列であることがわかる. さらに X は完備であったから $\{x_{n_j}\}$ は収束する. 以上より, X が点列コンパクトであることが示された. $\square$

同相写像によって (点列) コンパクト性は保たれる (定理 9.8, 定理 10.8). しかし, 完備性は同相写像では必ずしも保たれない. たとえば, $\mathbb{R}$ は完備であるが, それと同相である开区間 $(0, 1)$ は完備ではない. したがって, 完備性を保つ写像を特徴づけるには, より強い条件を付加する必要がある.

定義 12.9 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が下記の (*) をみたすとき, f は**一様連続**であるという.

$$(*) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ d_X(x_1, x_2) < \delta \text{ であるすべての } x_1, x_2 \in X \text{ について } d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

とくに f が全単射で, f も f^{-1} も一様連続であるとき, f は**一様同値写像**であるという. X から Y への一様同値写像が存在するとき, X と Y は**一様同値**であるという.

注意 一様連続写像は連続写像であり, 一様同値写像は同相写像である.

補題 12.10 $f: X \rightarrow Y$ が距離空間の間の一様連続写像のとき, $\{x_n\}$ が X のコーシー列ならば, $\{f(x_n)\}$ は Y のコーシー列である.

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. まず, f が一様連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して, $x, x' \in X$ が $d_X(x, x') < \delta$ をみたすならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる. さらに, $\{x_n\}$ がコーシー列なので, この $\delta > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ がとれて, $N \leq m, n$ ならば $d_X(x_m, x_n) < \delta$ となり, 結局 $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ が成り立つ. このことは, $\{f(x_n)\}$ がコーシー列であることを示している. $\square$

定理 12.11 距離空間 X, Y が一様同値であるとき, X が完備ならば, Y も完備である.

証明 一様同値写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在する. このとき, f およびその逆写像 $g = f^{-1}$ も一様連続である. Y のコーシー列 $\{y_n\}$ を任意にとると, 前補題から $\{g(y_n)\}$ は X のコーシー列である. X は完備なので, $\{g(y_n)\}$ は X の点 x に収束する. すなわち $g(y_n) \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). f の連続性から, $y_n = f(g(y_n)) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), よって $\{y_n\}$ は収束し, Y の完備性が示された. $\square$