

§11. 点列コンパクトとコンパクトの同値性

前々節では点列コンパクトに関する性質を、前節ではコンパクトに関する性質を紹介した。補題 9.3 における“点列コンパクト”を“コンパクト”に置き換えれば補題 10.3 になる。補題 9.4 と補題 10.4 にも同様の関係がある。さらに、点列コンパクトに関する定理 9.5～9.9 も、コンパクトに関する定理 10.5～10.9 とそれぞれ全く同じ事柄を主張している。

以上のことは、距離空間において、点列コンパクトとコンパクトは全く同じ概念であることを示唆している。実際、次の定理が成り立つ。

定理 11.1 距離空間 X の部分集合 A について、 A がコンパクトであるためには、 A が点列コンパクトであることが必要十分である。

ええ～、それじゃ、前節の証明ってやんなくてもよかったんじゃない？とおっしゃる方もいらっしゃることは重々理解しております。そこは、あれです、「教育的効果」ってやつですよ。それに、ひとつの命題に対して全く異なる複数の証明をすることで、その命題の数学的な理解が深まると言え、意味があると思うの。

まあ言い訳はこのくらいにして、定理の証明を始めましょう。

補題 11.2 X を距離空間とする。 X の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に属する集合が、互いに補集合の関係をもつとする。すなわち、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $F_\lambda = O_\lambda^c$ が成り立つとする。このとき、 X の部分集合 A に対して、次は同値である。

- (i) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ ならば、ある有限集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda$
- (ii) どの有限集合 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ についても $A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} F_\lambda \neq \emptyset$ ならば、 $A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$

証明 (i) の対偶をとれば、

$$\text{どの有限集合 } \Lambda_0 \subset \Lambda \text{ についても } A \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda \text{ ならば、} A \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

一般に、集合 S, T に対して、 $S \subset T \Leftrightarrow S^c \supset T^c$ および $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$ が成り立つから、上は

$$\text{どの有限集合 } \Lambda_0 \subset \Lambda \text{ についても } A^c \not\supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} F_\lambda \text{ ならば、} A^c \not\supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

と同値であり、これは (ii) そのものである。 □

一般に、ある集合 S の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は、

任意有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ ($r \geq 1$) に対して $T_{\lambda_1} \cap \dots \cap T_{\lambda_r} \neq \emptyset$

をみたすとき、**有限交差性をもつ**という。さらに S の部分集合 A に対して、部分集合族 $\{A \cap T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が有限交差性をもつとき、すなわち

任意有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ ($r \geq 1$) に対して $A \cap T_{\lambda_1} \cap \dots \cap T_{\lambda_r} \neq \emptyset$

であるとき、 $\mathcal{T}$ は A について**有限交差性をもつ**という。

補題 11.2 の性質 (ii) の仮定は、閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が A について有限交差性をもつことを意味している。

命題 11.3 A を距離空間 X の部分集合とすると、次は同値である。

(i) A はコンパクトである。

(ii) A について有限交差性をもつ X の任意の閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は、

$$A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$$

をみたす。

証明 A がコンパクトであるとは、定義により、任意の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して、補題 11.2 の性質 (i) がなりたつことである。 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が X の任意の開集合族にわたるとき、 $F_\lambda = O_\lambda^c$ によって与えられる集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の任意の閉集合族にわたる。よって、補題 11.2 の同値性から、(i), (ii) の同値性が導かれる。□

定理 11.1 必要性の証明 A がコンパクトであると仮定する。 A 上の任意の点列 $\{x_n\}$ をとり、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_n = \{x_j \mid n < j\} = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

とおく。有限個の $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ に対して、 $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$ とすれば、

$$A \supset T_{n_1} \cap \dots \cap T_{n_r} = T_n \neq \emptyset$$

だから、集合族 $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は A について有限交差性をもち、したがって、閉集合族 $\{\overline{T_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ もまた A について有限交差性をもつ。よって前命題より、

$$A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{T_n} \neq \emptyset.$$

そこで、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in \overline{T_n}$ であるような $x \in A$ がとれる。いま、自然数 n_1 を任意にとれば、 $x \in \overline{T_{n_1}}$ より、 $x_{n_2} \in T_{n_1} \cap U(x, 1/2)$ をみたす n_2 がとれる。とくに

$n_1 < n_2$ かつ $d(x_{n_2}, x) < 1/2$ となっている. 次に, $x \in \overline{T_{n_2}}$ より, $x_{n_3} \in T_{n_2} \cap U(x, 1/3)$ をみたく n_3 がとれて, $n_2 < n_3$ かつ $d(x_{n_3}, x) < 1/3$ が成り立つ. 同様にして, 各自然数 $j > 1$ に対して

$$n_{j-1} < n_j \quad \text{かつ} \quad d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{j}$$

をみたく n_j を順にとることができる. このとき $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) かつ $x \in A$, すなわち $\{x_n\}$ は A の元に収束する部分列をもつ. よって A は点列コンパクトである. $\square$

命題 11.4 A を距離空間 X の点列コンパクトな部分集合とし, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $x \in A$ に対して $U(x, \varepsilon) \subset O_\lambda$ をみたく $\lambda \in \Lambda$ がとれる.

証明 結論を否定すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $x \in A$ が存在し, すべての $\lambda \in \Lambda$ について $U(x, \varepsilon) \not\subset O_\lambda$ となる. とくに, 各自然数 n について, $\varepsilon = 1/n$ に対してとれる $x \in A$ を x_n とすれば,

$$\text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ について, } U\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_\lambda.$$

ここで, A は点列コンパクトだから, 点列 $\{x_n\}$ は A の点 x に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. さらに, $x \in O_\lambda$ であるような λ をとると, O_λ は開集合だから, $U(x, \delta) \subset O_\lambda$ をみたく $\delta > 0$ が存在する. 一方, 定理 6.11 より, ある自然数 k がとれて, $k \leq j$ ならば $x_{n_j} \in U\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ となる. このとき $U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right) \subset O_\lambda$ が成り立つ. なぜなら, $y \in U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right)$ のとき,

$$d(y, x) \leq d(y, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

より $y \in U(x, \delta) \subset O_\lambda$ となるからである. 最後に, $\frac{1}{n_j} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) より, $\frac{1}{n_j} \leq \frac{\delta}{2}$ をみたくように $j \geq k$ をとることができる. $U\left(x_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subset U\left(x_{n_j}, \frac{\delta}{2}\right) \subset O_\lambda$ が導かれて, x_n のとり方に矛盾する. $\square$

定理 11.1 十分性の証明 A が点列コンパクトであるとする. A がコンパクトでないと仮定して矛盾を導く. このとき, A の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で, 有限部分被覆をもたないものが存在する. すなわち, どんな有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ をとっても

$$A \not\subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_r}$$

となっている. $\mathcal{O}$ に対して, 前命題のような $\varepsilon > 0$ をひとつとって固定する. $x_1 \in A$ を任意にとる. このとき, $U(x_1, \varepsilon) \subset O_{\lambda_1}$ をみたく $\lambda_1 \in \Lambda$ がとれる. $\mathcal{O}$ は有限部分被覆をもたないので $A \not\subset O_{\lambda_1}$, よって $x_2 \notin O_{\lambda_1}$ をみたく $x_2 \in A$ がとれる. この x_2 に対

して, $U(x_2, \varepsilon) \subset O_{\lambda_2}$ をみたま $\lambda_2 \in \Lambda$ がとれるが, 再び $\mathcal{O}$ が有限部分被覆をもたないことから $A \not\subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2}$ なので, $x_3 \notin O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2}$ をみたま $x_3 \in A$ がとれる. 同様にして, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\lambda_n \in \Lambda$ および $x_n \in A$ がとれて

$$U(x_n, \varepsilon) \subset O_{\lambda_n} \quad \text{かつ} \quad x_n \notin O_{\lambda_j} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

をみたま. とくに $x_n \notin U(x_j, \varepsilon)$, したがって $d(x_j, x_n) \geq \varepsilon$ ($j = 1, \dots, n-1$) を得る. すなわち,

$$m < n \quad \text{ならば} \quad d(x_m, x_n) \geq \varepsilon.$$

さて, A は点列コンパクトだから, 点列 $\{x_n\}$ は A の点に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. とくに, $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) であるが, 一方で任意の j について, $n_j < n_{j+1}$ より, $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) \geq \varepsilon$ が成り立っているから矛盾する. $\square$