

§10. コンパクト性

定義 10.1 X を距離空間とする. A を X の部分集合, $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の開集合の族とする.

- (1) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ をみたすとき, $\mathcal{C}$ を A の**開被覆**という.
- (2) A の開被覆 $\mathcal{C}$ の部分族 $\mathcal{C}_0$ が A の開被覆になっているとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の**部分被覆**という.
- (3) 上の定義で, とくに $\mathcal{C}_0$ が $\mathcal{C}$ の有限部分族であるとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の**有限部分被覆**という.

すなわち, $\Lambda_0 \subset \Lambda$ で定まる $\mathcal{C}_0 = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ が A の開被覆であるとき, $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の部分被覆といい, とくに Λ_0 が有限集合であるとき, 有限部分被覆というわけである.

定義 10.2 X を距離空間, A をその部分集合とする. A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつとき, A は**コンパクト**であるという. すなわち, A がコンパクトであるとは, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるような任意の開集合族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, $A \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ をみたす有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在することである.

補題 10.3 コンパクトな距離空間の開集合はコンパクトである.

証明 X をコンパクトな距離空間, A をその開集合とする. $\mathcal{C} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の任意の開被覆とすると, これに開集合 A^c を付け加えた $\{A^c\} \cup \mathcal{C}$ は X の開被覆である. X はコンパクトだから, 有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ がとれて $X = A^c \cup O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ をみたす (A^c がなくても X の開被覆になってるかもしれないが, その場合 A^c を加えても開被覆になっている). よって, $A \subset O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ となり, A はコンパクトである. $\square$

補題 10.4 距離空間のコンパクトな部分集合は閉集合である.

証明 (X, d) を距離空間, A をそのコンパクトな部分集合とする. A が閉集合でないとする. 点 $x \in \bar{A} \setminus A$ がとれる. このような x をひとつ固定する. いま, $a \in A$ に対して, $a \neq x$ より $0 < \delta \leq d(a, x)/2$ のような δ がとれるが, このときあきらかに $U(a, \delta) \cap U(x, \delta) = \phi$, したがって $U(a, \delta) \subset U(x, \delta)^c$ が成り立つ. とくに, a

は $U(x, \delta)^c$ の内点 ($= U(x, \delta)$ の外点), すなわち $a \in (U(x, \delta)^c)^\circ$ を得る. よって, $\{(U(x, \delta)^c)^\circ \mid \delta > 0\}$ は A の開被覆である;

$$A \subset \bigcup_{\delta > 0} (U(x, \delta)^c)^\circ.$$

A はコンパクトだから, 有限個の $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ が存在して

$$A \subset (U(x, \delta_1)^c)^\circ \cup \dots \cup (U(x, \delta_n)^c)^\circ$$

とできる. いま, $\varepsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ とおくと, $x \in \bar{A}$ より, 点 $b \in U(x, \varepsilon) \cap A$ が存在し, さらに $b \in (U(x, \delta_i)^c)^\circ$ である δ_i ($1 \leq i \leq n$) がとれるが, このとき, $\delta_i \leq d(b, x) < \varepsilon \leq \delta_i$ となって矛盾する. $\square$

定理 10.5 有限個のコンパクト距離空間の直積空間はコンパクトである.

証明 2 個の場合, すなわち, 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ がどちらもコンパクトのとき, 直積空間 $(X \times Y, d)$ もコンパクトであることを示せばよい.

まず, $x \in X, y \in Y, \varepsilon > 0$ に対して, $X, Y, X \times Y$ における ε -近傍をそれぞれ $U_X(x, \varepsilon), U_Y(y, \varepsilon), U((x, y), \varepsilon)$ と記すことにすると, 距離 d の定義 (定義 5.3, 5.5) より

$$U_X(x, \varepsilon) \times U_Y(y, \varepsilon) \subset U((x, y), \varepsilon)$$

が成り立つことに注意する.

さて, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $X \times Y$ の任意の開被覆とする. いま, 各 $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $(x, y) \in O_{\lambda(x, y)}$ をみたす $\lambda(x, y) \in \Lambda$ をひとつずつとっておく. $O_{\lambda(x, y)}$ は開集合だから, ある $\varepsilon(x, y) > 0$ が存在して, $U((x, y), \varepsilon(x, y)) \subset O_{\lambda(x, y)}$, したがって

$$U_X(x, \varepsilon(x, y)) \times U_Y(y, \varepsilon(x, y)) \subset O_{\lambda(x, y)}.$$

ここで, 各 $x \in X$ に対して, $\{U_Y(y, \varepsilon(x, y)) \mid y \in Y\}$ は Y の開被覆だから, Y のコンパクト性より, ある自然数 $n(x)$ と $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n(x)}(x) \in Y$ が存在して

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n(x)} U_Y(y_j(x), \varepsilon(x, y_j(x))).$$

そこで, $\delta(x) = \min\{\varepsilon(x, y_j(x)) \mid j = 1, \dots, n(x)\}$ とおけば, $\{U_X(x, \delta(x)) \mid x \in X\}$ は X の開被覆で, X はコンパクトだから, 有限個の $x_1, \dots, x_m \in X$ がとれて

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_X(x_i, \delta(x_i)).$$

すべての $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n(x_i)$ に対して $\delta(x_i) \leq \varepsilon(x_i, y_j(x_i))$, よって

$$U_X(x_i, \delta(x_i)) \times U_Y(y_j(x_i), \varepsilon(x_i, y_j(x_i))) \subset O_{\lambda(x_i, y_j(x_i))},$$

が成り立つから

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n(x_i)} O_{\lambda(x_i, y_j(x_i))}$$

が得られ, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が有限部分被覆をもつことが示された. $\square$

定理 10.6 (ハイネ-ボレル) 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $[a, b]$ の任意の開被覆とする; $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$. いま, $a \leq x \leq b$ かつ有限個の O_λ で $[a, x]$ を覆うことができるような x 全体の集合を A とする. すなわち,

$$A = \left\{ x \in [a, b] \mid \text{有限個の } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \text{ が存在して } [a, x] \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i} \right\}.$$

このとき $b \in A$ を示せばよい. $a \in A$ より A は空でなく, かつ有界でもあるから, $c = \sup A$ が存在する. あきらかに $c \in [a, b]$ であるから, $c \in O_{\lambda_0}$ をみたす $\lambda_0 \in \Lambda$ がとれる. O_{λ_0} は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$. この ε に対して, 上限の定義から $c - \varepsilon < x \leq c$ であるような $x \in A$ が存在し, さらに, A の定義より, $[a, x] \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$ であるような有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ がとれる. そこで, $\delta = \min\{b - c, \varepsilon/2\}$ とおけば, $c - \varepsilon < x \leq c \leq c + \delta < c + \varepsilon$ より,

$$[a, c + \delta] \subset [a, x] \cup (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n} \cup O_{\lambda_0}$$

かつ $c + \delta \in [a, b]$ であるから, $c + \delta \in A$ を得る. しかし, c が A の上限だったので $\delta = 0$ でなければならない. したがって $b = c \in A$ が確かめられた. $\square$

定理 10.7 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について, A がコンパクトであるためには, A が有界閉集合であることが必要十分である.

証明 【必要性】 A がコンパクトであるとする. 補題 10.4 より A は閉集合であることは示されているから, 有界性を確かめればよい. 自然数 m に対する原点 $\mathbf{0}$ の m -近傍の族 $\{U(\mathbf{0}, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆だから, もちろん A の開被覆でもある. よって有限個の $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ がとれて,

$$A \subset U(\mathbf{0}, m_1) \cup \dots \cup U(\mathbf{0}, m_r)$$

となる. そこで, $M = \max\{m_1, \dots, m_r\}$ とおけば, $A \subset U(\mathbf{0}, M)$ をみたすから A は有界である.

【十分性】 A が有界閉集合であるとする. 有界性から, A は $\mathbb{R}$ の有界閉区間の直積 C に含まれる, すなわち $a_i < b_i$ をみたす実数 a_i, b_i が存在して

$$A \subset C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

このとき, 定理 10.6 と定理 10.5 より, C はコンパクトである. さらに A は閉集合 (正確には $\mathbb{R}^n$ の部分空間 C の閉集合) だから, 補題 10.3 よりコンパクトである. $\square$

定理 10.8 $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像で, X がコンパクトであるとする.

- (1) $f(X)$ もコンパクトである.
- (2) f が単射ならば, $f(X)$ と X は同相である.
- (3) f が全単射ならば, f は同相写像である.

証明 (1) Y の開集合の族 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $f(X)$ の開被覆であるとする;

$$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda.$$

このとき, f は連続だから, 定理 6.8 より $f^{-1}(O_\lambda)$ はすべて X の開集合であり, かつ

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda),$$

すなわち, $\{f^{-1}(O_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトだから, 有限個の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X = f^{-1}(O_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(O_{\lambda_n})$$

とできる. よって, $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の有限部分被覆

$$f(X) = f(f^{-1}(O_{\lambda_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(O_{\lambda_n})) \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$$

が得られ, $f(X)$ がコンパクトであることが示された.

(2) f の単射性より, 写像 $g: f(X) \rightarrow X$ を $g = f^{-1}$ として自然に定義することができる. そこで, (2) を示すためには, g が連続であることがいえればよい. いま, A を X の任意の閉集合とすると, 補題 10.3 より A はコンパクト, よって (1) で示したように, $f(A)$ はコンパクトになるから, 補題 10.4 より閉集合である. すなわち, $f(A) = g^{-1}(A)$ が閉集合であるから, 定理 7.5 によって, g が連続であることがわかる.

(3) は (2) から直ちに導かれる. □

定理 10.9 空でないコンパクト距離空間上の実数値連続関数は, 最大値, 最小値をもつ.

証明 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ をコンパクト距離空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とすると, 前定理の (1) から $f(X)$ はコンパクトであり, さらに定理 10.7 より $f(X)$ は有界閉集合である. とくに有界性から $M = \sup f(X)$ が存在する. 上限の定義より M は $f(X)$ の集積点だから, 補題 8.4 より $M \in \overline{f(X)}$. さらに $f(X)$ は閉集合なので, $M \in f(X)$, したがって M は $f(X)$ の最大値である. 同様にして, $\inf f(X)$ が存在して $f(X)$ の最小値となる. □