

§9. 点列コンパクト性

距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ の**部分列** $\{x_{n_j}\}$ とは, $\{x_n\}$ から n_j 番目だけを取り出して得られる X の点列のことである. 正確には, $\{x_n\}$ が写像 $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ であるとき, ある狭義単調増加自然数列 $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ によって, $s \circ \mu: \mathbb{N} \rightarrow X$ で与えられる点列を $\{x_n\}$ の部分列という. いま $n_j = \mu(j)$ と書けば, $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ となっているが, このとき部分列 $s \circ \mu$ をふつう $\{x_{n_j}\}$ と表すわけである.

定義 9.1 X を距離空間とする.

- (1) X の任意の点列が収束する部分列をもつとき, X は**点列コンパクト**であるという.
- (2) X の部分集合 A は, 部分距離空間として点列コンパクトであるとき, 点列コンパクトであるという. すなわち, A の任意の点列が A の点に収束する部分列をもつとき, A は点列コンパクトであるという.

例 9.2 $\mathbb{R}$ の开区間 (a, b) は点列コンパクトではない. 実際, 数列 $\{x_n\}$ として, たとえば $x_n = a + (b-a)/2^n$ を考えれば, $x_n \in (a, b)$ であるが, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow a$ が成り立つから, $\{x_n\}$ のどんな部分列をとっても a に収束し, (a, b) の元には収束しない. よって (a, b) は点列コンパクトではない. 同じ理由で, 半开区間 $(a, b]$, $[a, b)$ も点列コンパクトではない. じゃあ閉区間 $[a, b]$ はどうよ, という疑問には, も少しあとでお答えしましょう (定理 9.6).

補題 9.3 点列コンパクトな距離空間の閉集合は点列コンパクトである.

証明 A を点列コンパクトな距離空間 (X, d) の閉集合とする. A の任意の点列 $\{x_n\}$ をとると, それはもちろん X の点列でもあるから, X において収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ. $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすると, A が閉集合であることと補題 7.6 より, $x \in A$ が導かれる. よって A は点列コンパクトである. $\square$

補題 9.4 距離空間の点列コンパクトな部分集合は閉集合である.

証明 X を距離空間, A をその点列コンパクトな部分集合とする. いま, A の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束しているとする. このとき, $x \in A$ を示せば, 補題 7.6 から A が閉集合であることがいえる. いま, A は点列コンパクトだから $\{x_n\}$ は A の点 a に収束する部分列をもつが, もともと $\{x_n\}$ は x に収束するので $x = a$ でなくてはならず, $x \in A$ が確かめられた. $\square$

定理 9.5 有限個の点列コンパクト距離空間の直積空間は点列コンパクトである.

証明 2個の場合, すなわち, 距離空間 X, Y がどちらも点列コンパクトのとき, 直積空間 $X \times Y$ も点列コンパクトであることを示せばよい. いま, $X \times Y$ 上の任意の点列 $\{p_n\}$ に対して, $p_n = (x_n, y_n)$ とかけば, $\{x_n\}, \{y_n\}$ はそれぞれ X, Y の点列である. X は点列コンパクトなので, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}$ で, ある $x \in X$ に収束するものがとれる. つぎに, Y も点列コンパクトだから, $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_{j_k}}\}$ に対して, その部分列 $\{y_{n_{j_k}}\}$ で, ある $y \in Y$ に収束するものがとれる. このとき, $x_{n_{j_k}} \rightarrow x, y_{n_{j_k}} \rightarrow y$ ($k \rightarrow \infty$) なので, 命題 5.7 より, $\{p_n\}$ の部分列 $\{p_{n_{j_k}}\}$ は (x, y) に収束する. したがって $X \times Y$ は点列コンパクトである. $\square$

注意 直積集合には, 定義 5.3 にあるように異なる距離 d, d_2, d_∞ が定義できる. にもかかわらず, 命題 5.4 より, これらは同じ位相を定めるので, どの距離を用いても「点列コンパクト」の定義は同じことになる.

定理 9.6 実数 a, b が $a < b$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ は点列コンパクトである.

証明 (微積の授業でやってるはずなので, 復習のつもりで...) $x_n \in [a, b]$ である任意の数列 $\{x_n\}$ をとる. いま c を a, b の中点とすると, $[a, c], [c, b]$ の少なくとも一方は無限個の $n \in \mathbb{N}$ について x_n を含む. それを $[a_1, b_1]$ とする. 次に a_1, b_1 の中点 c_1 をとると, $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ の少なくとも一方は無限個の $n \in \mathbb{N}$ について x_n を含む. それを $[a_2, b_2]$ とする. 以下同様にして a_j, b_j を順に定めると, 無限個の $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in [a_j, b_j]$ であり, しかも

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b,$$

$$0 < b_j - a_j = \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

が確かめられる. よって, 区間縮小法の原理より, すべての j に対して $d \in [a_j, b_j]$ である実数 d が一意的に存在し,

$$a_j \rightarrow d, \quad b_j \rightarrow d \quad (j \rightarrow \infty).$$

最後に $\{x_n\}$ の部分列を以下のように定める. まず, $x_n \in [a_1, b_1]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限にあるから, そのような n を任意にひとつ選び n_1 とする. 次に, $x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限にあるから, $n_1 < n_2$ かつ $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ であるように n_2 がとれる. 同様にして, 各 $j \geq 2$ に対して, n_j を $n_{j-1} < n_j$ かつ $x_{n_j} \in [a_j, b_j]$ をみたすようにとることができ, 部分列 $\{x_{n_j}\}$ を作ることができる. このとき

$$a_j \leq x_{n_j} \leq b_j$$

となっているので, $x_{n_j} \rightarrow d$ ($j \rightarrow \infty$) を得る. ここで, $d \in [a, b]$ だから, $\{x_{n_j}\}$ は $[a, b]$ の元に収束する部分列であり, $[a, b]$ が点列コンパクトであることが示された. $\square$

定理 9.7 (ボルツァノ-ワイエルシュトラス) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について、 A が点列コンパクトであるためには、 A が有界閉集合であることが必要十分である。

証明 【必要性】 A が点列コンパクトであるとする。補題 9.4 より A は閉集合であることは示されているから、有界性を確かめればよい。もし有界でないとする、各自然数 n に対して $\|x_n\| \geq n$ をみたす $x_n \in A$ がとれる。仮定より、点列 $\{x_n\}$ は A の点に収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ。その極限を $x \in A$ とすると、とくに、ある $j_0 \in \mathbb{N}$ がとれて、 $j_0 \leq j$ ならば $\|x_{n_j} - x\| < 1$ が成り立つ。そこで、自然数 j を $j \geq \max\{j_0, 1 + \|x\|\}$ をみたすようにとれば

$$n_j \leq \|x_{n_j}\| \leq \|x_{n_j} - x\| + \|x\| < 1 + \|x\| \leq j \leq n_j$$

となって矛盾する。

【十分性】 A が有界閉集合であるとする。有界性から、 A は $\mathbb{R}$ の有界閉区間の直積 C に含まれる、すなわち $a_i < b_i$ をみたす実数 a_i, b_i が存在して

$$A \subset C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

このとき、定理 9.6 と定理 9.5 より、 C は点列コンパクトである。さらに A は閉集合（正確には $\mathbb{R}^n$ の部分空間 C の閉集合）だから、補題 9.3 より点列コンパクトである。□

定理 9.8 $f: X \rightarrow Y$ を距離空間の間の連続写像で、 X が点列コンパクトであるとする。

- (1) $f(X)$ も点列コンパクトである。
- (2) f が単射ならば、 $f(X)$ と X は同相である。
- (3) f が全単射ならば、 f は同相写像である。

証明 (1) $f(X)$ の任意の点列 $\{y_n\}$ について、 $f(x_n) = y_n$ をみたす $x_n \in X$ を各 n に対してひとつずつとる。 X は点列コンパクトなので、点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ。そこで、 $x_{n_j} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) とすれば、 f の連続性から $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$ ($j \rightarrow \infty$) でなければならない。すなわち $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_j}\}$ は $f(x) \in f(X)$ に収束し、 $f(X)$ が点列コンパクトであることが示された。

(2) f の単射性より、写像 $g: f(X) \rightarrow X$ を $g = f^{-1}$ として自然に定義することができる。そこで、(2) を示すためには、 g が連続であることがいえればよい。いま、 A を X の任意の閉集合とすると、補題 9.3 より A は点列コンパクト、よって (1) で示したように、 $f(A)$ は点列コンパクトになるから、補題 9.4 より閉集合である。すなわち、 $f(A) = g^{-1}(A)$ が閉集合であるから、定理 7.5 によって、 g が連続であることがわかる。

(3) は (2) から直ちに導かれる。 □

定理 9.9 空でない点列コンパクト距離空間上の実数値連続関数は、最大値、最小値をもつ.

証明 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を点列コンパクト距離空間 X から $\mathbb{R}$ への写像とすると、前定理の (1) から $f(X)$ は点列コンパクトであり、さらに定理 9.7 より $f(X)$ は有界閉集合である. とくに有界性から $M = \sup f(X)$ が存在する. このとき, M に収束する $f(X)$ の数列がとれるが, $f(X)$ は閉集合なので, 定理 7.6 によって $M \in f(X)$, したがって M は $f(X)$ の最大値である. 同様にして, $\inf f(X)$ が存在して $f(X)$ の最小値となる. $\square$