

## §8. 集積点, 稠密性

**定義 8.1**  $X$  を距離空間,  $p \in A \subset X$  とする.  $V \cap A = \{p\}$  をみたす  $p$  の近傍  $V$  が存在するとき,  $p$  を  $A$  の**孤立点**という.

**定義 8.2**  $X$  を距離空間,  $A$  をその部分集合,  $p \in X$  とする.  $p$  の任意の近傍  $V$  が  $p$  と異なる  $A$  の点をもつとき, すなわち  $p \neq x \in V \cap A$  をみたす点  $x$  が存在するとき,  $p$  を  $A$  の**集積点**という.

定義により,  $A$  の孤立点はもちろん  $A$  に属するが, 集積点は必ずしも  $A$  に属するとは限らない. しかし,  $A$  に属する点に限定すれば, 次が成り立つことはあきらかである.

**補題 8.3**  $X$  を距離空間,  $A$  をその部分集合とすると,  $p \in A$  に対して,  $p$  が  $A$  の集積点であるためには,  $p$  が  $A$  の孤立点でないことが必要十分である.

以下に, 集積点の性質をいくつか挙げる.

**補題 8.4**  $X$  を距離空間,  $A$  をその部分集合とする.

- (1)  $p$  が  $A$  の集積点ならば,  $p$  は  $A$  の触点, すなわち  $p \in \overline{A}$  である.
- (2)  $p$  が  $A$  の触点で, かつ  $p \notin A$  ならば,  $p$  は  $A$  の集積点である.

**証明** (1)  $p$  が  $A$  の集積点ならば,  $p$  の近傍  $V$  をどのようにとっても  $(V \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ , とくに  $V \cap A \neq \emptyset$  なので  $p$  は触点である.

(2)  $p \in \overline{A} \setminus A$  とすると,  $p$  のどんな近傍  $V$  に対しても  $V \cap A \neq \emptyset$  であるが,  $p \notin A$  より  $p \notin V \cap A$ , したがって  $V \cap A$  は  $p$  でない点を含み,  $p$  は  $A$  の集積点である.  $\square$

**命題 8.5**  $(X, d)$  を距離空間とする.  $A \subset X$  と  $p \in X$  について, 次は同値である.

- (i)  $p$  は  $A$  の集積点である.
- (ii)  $p$  に収束する  $A$  の点列  $\{x_n\}$  で, すべての  $n \in \mathbb{N}$  について  $x_n \neq p$  をみたすものが存在する.

**証明** (i) $\Rightarrow$ (ii): 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $U(p, 1/n)$  は  $p$  の近傍だから, 仮定 (i) によって,  $p \neq x_n \in U(p, 1/n)$  をみたす  $x_n \in A$  がとれる. このとき  $d(x_n, p) < 1/n$  だから  $\{x_n\}$  は  $p$  に収束し, (ii) を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i):  $V$  を  $p$  の任意の近傍とする. (ii) の性質をもつ  $A$  の点列  $\{x_n\}$  をとると, これは  $p$  に収束しているから, 命題 6.10 より, ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $x_n \in V$ . ここで,  $x_n \neq p$  であったから,  $V$  は  $p$  でない  $A$  の点をもつ. したがって (i) が示された.  $\square$

**補題 8.6**  $A$  を距離空間  $X$  の部分集合で,  $p$  が  $A$  の集積点ならば,  $p$  のどんな近傍  $V$  も  $A$  の点を無限個含む, すなわち  $V \cap A$  は無限集合である.

**証明**  $S = (V \cap A) \setminus \{p\}$  とおく. もし  $V \cap A$  が有限集合ならば,  $S$  もそうなので, 命題 7.4 より,  $V \setminus S$  は  $p$  の近傍である.  $p$  は  $A$  の集積点なので,  $V \setminus S$  は  $p$  と異なる  $A$  の点  $x$  を含む. このとき,  $x \in V \setminus S$  より  $x \notin S$  であり, 一方で  $x \neq p$  かつ  $x \in V \cap A$  より  $x \in S$  となって矛盾する.  $\square$

**定義 8.7**  $A$  を距離空間  $X$  の部分集合とする.

- (1)  $\bar{A} = X$  であるとき,  $A$  は**稠密**であるという.
- (2)  $(\bar{A})^\circ = \phi$  であるとき,  $A$  は**疎**であるという.

**例 8.8** (1) 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は  $\mathbb{R}$  において稠密である.

(2) 実無理数全体の集合  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  も  $\mathbb{R}$  において稠密である.

(3)  $\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{R}$  において疎である.

(4)  $a < b$  のとき, 区間  $(a, b)$ ,  $[a, b]$  はどちらも  $\mathbb{R}$  において疎ではない.

(5)  $\mathbb{R}^2$  において, 直線  $L$  は疎である.

**命題 8.9** 距離空間  $X$  の部分空間  $A$  が疎ならば, その補集合  $A^c$  は稠密である.

**証明** 任意の  $p \in X$  に対して  $p \in \overline{(A^c)}$ , すなわち  $p$  が  $A^c$  の触点であることを示せばよい. もし触点でなかったとすると,  $p$  の近傍  $V$  が存在して  $V \cap A^c = \phi$ , つまり  $V \subset A$  が成り立つ. よって  $p$  は  $A$  の内点であり,  $p \in A^\circ \subset (\bar{A})^\circ$  であるが, このことは  $A$  が疎であること,  $(\bar{A})^\circ = \phi$  に矛盾する.  $\square$

**命題 8.10** 距離空間  $X$  の部分集合  $A$  が閉集合または開集合ならば, その境界  $\dot{A}$  は疎である.

**証明** 開集合の補集合は閉集合だから、命題 7.15 より、 $A$  が閉集合のときに示せば十分である。さらに、境界  $\dot{A}$  は閉集合だから、 $(\dot{A})^\circ = \phi$  を確かめればよい。もし  $(\dot{A})^\circ \neq \phi$  とすると、内部の定義と命題 6.5 より、 $\phi \neq O \subset \dot{A}$  をみたす開集合  $O$  がとれる。ここで、 $A$  が閉集合、すなわち  $\bar{A} = A$  であることに注意すると、境界の定義から、

$$O \subset A \quad \text{かつ} \quad O \subset (A^\circ)^c$$

を得る。前者は、命題 7.10 により、 $O \subset A^\circ$  と書き換えることができるので、後者とあわせて、 $O \subset A^\circ \cap (A^\circ)^c = \phi$  となって  $O$  のとり方に矛盾する。□

**例 8.11 (カントールの三進集合)** 閉区間  $I = [0, 1]$  の部分集合  $C$  を次のように定める。まず  $C_0 = I = [0, 1]$  として、

$$C_1 = C_0 \setminus \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right]$$

$$C_2 = C_1 \setminus \left( \left( \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left( \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \right) = \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[ \frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right]$$

のように、残った閉区間をそれぞれ 3 等分して真ん中の开区間を取り除く操作を繰り返す。一般に、

$$\begin{aligned} (\clubsuit) \quad C_n &= C_{n-1} \setminus \bigcup_{j=0}^{3^{n-1}-1} \left( \frac{3j+1}{3^n}, \frac{3j+2}{3^n} \right) \\ &= \left[ 0, \frac{1}{3^n} \right] \cup \left[ \frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n} \right] \cup \cdots \cup \left[ \frac{3^n-3}{3^n}, \frac{3^n-2}{3^n} \right] \cup \left[ \frac{3^n-1}{3^n}, 1 \right] \end{aligned}$$

とする（取り除く部分が  $C_{n-1}$  に入っていないじゃん、という批判はごもっともだけど、差集合の定義からそれは大丈夫なのよ）と  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$  となるが、この“極限”，正確には次の式で定義される  $C$  を**カントールの三進集合**という。

$$(\spadesuit) \quad C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

この定義はある意味で“直観的”であるが、次のように明示的に表すこともできる。

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mid a_1, a_2, \dots \in \{0, 2\} \right\}.$$

とくに、 $C$  は非可算集合である。

**証明** いま、 $a \in I = [0, 1]$  を三進展開し、 $a = 0.a_1a_2\dots$  ( $a_j \in \{0, 1, 2\}$ ) と表す。ただし、有限小数で表せる  $a \neq 0$  については、

$$0.a_1a_2\dots a_r1 = 0.a_1a_2\dots a_r022\dots$$

の場合は右辺のように表し,

$$0.a_1a_2\dots a_r2 = 0.a_1a_2\dots a_r122\dots$$

の場合は左辺のように表すことにする (とくに  $1 = 0.22\dots$  に注意). このような表記のもとで,  $a \in I$  の小数第  $n$  位が 1 であるとする

$$0.a_1\dots a_{n-1}022\dots < a < 0.a_1\dots a_{n-1}2$$

となるが, 左右の三進表示をふつうの記法で書けば, 左は  $s = 1$ , 右は  $s = 2$  として

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{s}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^{n-1-k} + \frac{s}{3^n} = \frac{3j+s}{3^n}, \quad \text{ただし } j = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 3^{n-1-k}.$$

このとき  $0 \leq j \leq 3^{n-1} - 1$  が簡単に確かめられ, 上の不等式は

$$\frac{3j+1}{3^n} < a < \frac{3j+2}{3^n} \quad \text{すなわち} \quad a \in \left( \frac{3j+1}{3^n}, \frac{3j+2}{3^n} \right)$$

と書き換えられる. よって, (♣) を見れば, 三進展開したとき小数第  $n$  位が 1 である  $a \in I$  は,  $C_n$  を構成する際に取り除かれる数であることがわかる. したがって,  $C$  の元は 1 が現れない三進無限小数  $0.a_1a_2\dots$  として表され, このような数の全体が  $C$  を構成する.  $\square$

$C$  は, 距離空間  $I = [0, 1]$  の部分集合として次の性質をもつ.

- (1)  $C$  は疎な閉集合である.
- (2)  $C^c = I \setminus C$  は稠密である.
- (3)  $C$  のすべての点は  $C$  の集積点である.

**証明** (1)  $C_0 = I$  は閉集合であり,  $C_1$  は  $C_0$  から开区間を除いたものなので閉集合, 以下同様にして, 一般に  $C_n$  は閉集合  $C_{n-1}$  から有限個の开区間を除いたものなので, やはり閉集合である.  $C$  はそれらの共通部分 (♠) だから, 定理 7.2 (F3) より閉集合である. 次に,  $C$  が疎であることを示すには,  $C^\circ = \emptyset$  を確かめればよい. そこで,  $a \in C^\circ$  が存在したとして矛盾を導く. まず,  $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$  と表しておく.  $a$  は  $C$  の内点だから,  $U(a, \varepsilon) \subset C$  をみたす  $\varepsilon > 0$  がとれる. このとき  $1/3^m < \varepsilon$  であるような自然数  $m$  をとり,

$$b = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

と定めると, ( $a$  が有限小数で表せる場合は, あらかじめ  $m$  を十分大きくとっておくことで)  $b \notin C$  となる. 一方,  $a_m = 0$  または 2 より,  $|a - b| = 1/3^m < \varepsilon$  すなわち  $b \in U(a, \varepsilon) \subset C$  となって矛盾する.

(2) 命題 8.9 と (1) から導かれる.

(3) 任意の  $a \in C$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $U(a, \varepsilon) \cap C$  が  $a$  以外の点を含むことを示せばよい. そのために,  $2/3^m < \varepsilon$  をみたす自然数  $m$  をとる.  $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$  のとき,  $c_m = 2 - a_m$  すなわち  $c_m$  を,  $a_m = 0$  のときは 2,  $a_m = 2$  のときは 0 と定めて,

$$c = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{3^k} + \frac{c_m}{3^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

と置く. このとき, (有限小数  $a$  の場合, あらかじめ  $m$  を十分大きくとっておけば)  $c \in C$  であって,  $0 < |a - c| = 2/3^m < \varepsilon$  すなわち  $a \neq c \in U(a, \varepsilon) \cap C$  を得る.  $\square$