

§7. 閉集合, 内部, 閉包

定義 7.1 距離空間 (X, d) の部分集合 F は, その補集合 $F^c = X \setminus F$ が開集合のとき, 閉集合であるという. すなわち, F が閉集合であるためには, $y \notin F$ である任意の $y \in X$ に対して, $U(y, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在することが必要十分である.

定理 7.2 距離空間 (X, d) の閉集合全体が作る集合族を $\mathcal{F}$ とする:

$$\mathcal{F} = \{ F \subset X \mid F \text{ は } X \text{ の閉集合} \}.$$

このとき, $\mathcal{F}$ は以下をみたす.

- (F1) $X \in \mathcal{F}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
- (F3) $F_\lambda \in \mathcal{F}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

証明 (F1) は閉集合の定理から直ちにわかり, (F2), (F3) は, 定理 6.6 (O2), (O3) にド・モルガンの法則を適用すればよい. □

例 7.3 (1) $\mathbb{R}$ において, 閉区間は閉集合である.

(2) $\mathbb{R}^2$ において, $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ は閉集合である. 実際, D に属さない任意の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し, 十分小さい $\varepsilon > 0$ がとれて, $U((x, y), \varepsilon) \cap D = \emptyset$, よって D は閉集合である.

命題 7.4 (X, d) を距離空間, S を X の有限部分集合とする.

- (1) S は閉集合である.
- (2) O が開集合ならば, $O \setminus S$ も開集合である.
- (3) V が点 $p \in X$ の近傍で $p \notin S$ ならば, $V \setminus S$ も p の近傍である.

証明 (1) $y \notin S$ のとき, S が有限であることから, $\varepsilon = \min \{ d(x, y) \mid x \in S \}$ が定まり, $\varepsilon > 0$ となる. すべての $x \in S$ について $d(x, y) \geq \varepsilon$ だから, $U(y, \varepsilon) \cap S = \emptyset$, よって S は閉集合である.

(2) S^c は (1) により開集合だから, 定理 6.6 (2) から, $O \setminus S = O \cap S^c$ は開集合である.

(3) 命題 6.5 によって, $p \in O \subset V$ をみたす開集合 O がとれ, さらに $p \notin S$ より $p \in O \setminus S \subset V \setminus S$. よって, (2) を用いれば, 再び命題 6.5 から $V \setminus S$ は p の近傍であることがわかる. □

定理 7.5 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は連続である.
- (ii) Y の任意の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

証明 $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ と定理 6.8 から直ちに導かれる. □

定理 7.6 距離空間 (X, d) の部分集合 F について, 次は同値である.

- (i) F は閉集合である.
- (ii) F の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束するならば, $x \in F$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): F の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとする. もし, $x \notin F$ すなわち $x \in F^c$ ならば, 仮定 (i) より F^c は開集合だから, 定理 6.11 より, $x_n \in F^c$ となる自然数 n が存在することになり, $\{x_n\}$ が F の点列であることに矛盾する. よって $x \in F$ であり, (ii) を得る.

(ii) $\Rightarrow$ (i): もし F が閉集合でないとすると, F^c は開集合ではないから, ある $x \in F^c$ が存在して, どんな $\varepsilon > 0$ をとっても $U(x, \varepsilon) \not\subset F^c$ となっている. とくに, 各自然数 n に対して $x_n \in U(x, 1/n)$ かつ $x_n \notin F^c$ をみたす x_n がとれる. このとき, $d(x_n, x) < 1/n$ より $\{x_n\}$ は x に収束し, さらに $x_n \in F$ であるから, 仮定 (ii) より, $x \in F$ が導かれ, x のとり方に矛盾する. □

定義 7.7 A を距離空間 X の部分集合とし, $p \in X$ とする.

- (1) A が p の近傍であるとき, p は A の**内点**であるという. A の内点全体の集合を A の**内部**といい, A° で表す.
- (2) p の任意の近傍 V が $V \cap A \neq \emptyset$ をみたすとき, p は A の**触点**であるという. A の触点全体の集合を A の**閉包**といい, $\bar{A}$ で表す.

一般に, $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ が成り立つ. また, $A \subset B \subset X$ ならば, $A^\circ \subset B^\circ$ かつ $\bar{A} \subset \bar{B}$ である. さらに, 命題 6.5 を用いれば, 次の補題の証明は難しくない.

補題 7.8 A を距離空間 X の部分集合とし, $p \in X$ とする.

- (1) $p \in A^\circ \iff$ 「 $p \in O \subset A$ をみたす開集合 O が存在する」
- (2) $p \in \bar{A} \iff$ 「 $p \in O$ である任意の開集合 O について $O \cap A \neq \emptyset$ 」

補題 7.9 距離空間 X の部分集合 A について, $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ が成り立つ.

証明 X の部分集合 O, A について, 一般に「 $O \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow O \not\subset A^c$ 」が成り立つから, 補題 7.8 の (2), (1) を順に適用して,

$$\begin{aligned} p \in \overline{A} &\Leftrightarrow \text{「} p \in O \text{ である任意の開集合 } O \text{ について } O \not\subset A^c \text{」} \\ &\Leftrightarrow \text{「} p \in O \subset A^c \text{ をみたす開集合 } O \text{ は存在しない」} \Leftrightarrow p \notin (A^c)^\circ \end{aligned}$$

すなわち, $p \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow p \in (A^c)^\circ$ より等式を得る. $\square$

命題 7.10 A を距離空間 X の部分集合とする.

(1) A の内部は A に含まれる開集合全体の和集合である; $A^\circ = \bigcup_{\substack{O \text{ は開集合} \\ \text{かつ } O \subset A}} O$

とくに, A° は A に含まれる最大の開集合である.

(2) A の閉包は A を含む閉集合全体の共通部分である; $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ は閉集合} \\ \text{かつ } A \subset F}} F$

とくに, $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

証明 (1) は補題 7.8 (1) より直ちに示される. (2) を示すために, まず, 補題 7.9 より, $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ が成り立つことに注意する. そこで, A^c に対して (1) を適用し, ド・モルガンの法則を使えば,

$$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c = \bigcap_{\substack{O \text{ は開集合} \\ \text{かつ } O \subset A^c}} O^c$$

を得る. O が開集合全体を動くとき, O^c は閉集合全体を動き, さらに $O \subset A^c$ と $A \subset O^c$ は同値だから, 求めたい等式が導かれる. $\square$

系 7.11 距離空間 X の部分集合 A について, 「 A は開集合 $\Leftrightarrow A = A^\circ$ 」および, 「 A は閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ 」が成り立つ.

補題 7.12 A を距離空間 X の部分集合とする. p が A の触点, すなわち $p \in \overline{A}$ ならば, p に収束する A の点列が存在する.

証明 触点の定義から, p の任意の ε -近傍 $U(p, \varepsilon)$ は A と共通部分をもつ. とくに, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in U(p, 1/n) \cap A$ がとれる. このとき, $\{x_n\}$ は p に収束する A の点列である. $\square$

定義 7.13 A を距離空間 X の部分集合とする.

- (1) A^c の内点を A の**外点**といい, A の外点全体の集合を A の**外部**という. すなわち, 外部 $= (A^c)^\circ$ であるが, 補題 7.9 から, 外部 $= (\overline{A})^c$ と定めてもよい).
- (2) $\overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$ を A の**境界**といい, $\dot{A}$ で表す.

一般に, A の内部や外部は開集合であり, 閉包や境界は閉集合である. このことは, 命題 7.10 と前定義からすぐにわかる.

命題 7.14 A を距離空間 X の部分集合すると, X は, A の内部, 境界, 外部の互いに共通部分のない和として表される. すなわち

$$X = A^\circ \cup \dot{A} \cup (A^c)^\circ, \quad A^\circ \cap \dot{A} = \dot{A} \cap (A^c)^\circ = A^\circ \cap (A^c)^\circ = \phi.$$

証明 まず, $X = \dot{A} \cup (\dot{A})^c = \dot{A} \cup (\overline{A} \cap (A^\circ)^c)^c = \dot{A} \cup ((\overline{A})^c \cup A^\circ)$ だから, 補題 7.9 より, はじめの式を得る. また, $\dot{A} \subset (A^\circ)^c$ かつ $\dot{A} \subset \overline{A}$ より, $A^\circ \cap \dot{A} \subset A^\circ \cap (A^\circ)^c = \phi$ および $\dot{A} \cap (A^c)^\circ \subset \overline{A} \cap (\overline{A})^c = \phi$ が成り立ち, さらに, $A^\circ \cap (A^c)^\circ \subset A \cap A^c = \phi$ でもあるから, あとの式を得る. $\square$

命題 7.15 距離空間 X の部分集合 A に対して $B = A^c$ とおけば, $\dot{A} = \dot{B}$.

証明 前命題で示した共通部分のない和 $X = A^\circ \cap \dot{A} \cap (A^c)^\circ = B^\circ \cap \dot{B} \cap (B^c)^\circ$ を書き換えれば, $(\dot{A})^c = A^\circ \cap (A^c)^\circ = (B^c)^\circ \cap B^\circ = (\dot{B})^c$, したがって $\dot{A} = \dot{B}$ を得る. $\square$

最後に, この節で定義した概念 (閉集合, 内点, 内部, 触点, 閉包, 外点, 外部, 境界) も, 前節での近傍, 開集合と同様に, “距離” そのものではなく, “距離の定める位相” によって定まることを付け加えておく.