

§6. 近傍, 開集合

定義 6.1 p を距離空間 (X, d) の点とする.

- (1) $\varepsilon > 0$ に対して, $U(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}$ を p の ε -近傍という.
- (2) $V \subset X$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ がとれて, $U(p, \varepsilon) \subset V$ とできるとき, V は p の近傍であるという.
- (3) p の近傍全体の族, すなわち $\{V \subset X \mid V \text{ は } p \text{ の近傍}\}$ を p の近傍系という.

定義 6.2 (X, d) を距離空間とし, $O \subset X$ とする. すべての $p \in O$ に対して, O が p の近傍となっているとき, O を開集合という. すなわち, O が開集合であるためには, 任意の $p \in O$ に対して, $U(p, \varepsilon) \subset O$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在することが必要十分である.

例 6.3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

- (1) 开区間 (a, b) は, 任意の $p \in (a, b)$ の近傍である.
- (2) 閉区間 $[a, b]$ も, 任意の $p \in (a, b)$ の近傍であるが, a や b の近傍ではない. したがって, (a, b) は開集合だが, $[a, b]$ は開集合ではない.

補題 6.4 (X, d) を距離空間とする. 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x の ε -近傍 $U(x, \varepsilon)$ は開集合である.

証明 $p \in U(x, \varepsilon)$ を任意にとる. $d(p, x) < \varepsilon$ より, $\delta = \varepsilon - d(p, x)$ とおけば $\delta > 0$ である. いま $y \in U(p, \delta)$ ならば, $d(y, p) < \delta$ と三角不等式から

$$d(y, x) \leq d(y, p) + d(p, x) < \delta + d(p, x) = \varepsilon$$

ゆえ, $y \in U(x, \varepsilon)$. したがって $U(p, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$ となるから, 定義 6.2 より $U(x, \varepsilon)$ は開集合である. $\square$

命題 6.5 距離空間 (X, d) の部分集合 V と $p \in V$ について, 次は同値である.

- (i) V は p の近傍である.
- (ii) $p \in O \subset V$ をみたす開集合 O が存在する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) は、近傍の定義 6.1 (2) と前補題から直ちに示される. (ii) を仮定すると、開集合 O に含まれる ε -近傍 $U(p, \varepsilon)$ がとれ、 $U(p, \varepsilon) \subset V$ となるから、(i) を得る. $\square$

定理 6.6 距離空間 (X, d) の開集合全体が作る集合族を $\mathcal{O}$ とする:

$$\mathcal{O} = \{ O \subset X \mid O \text{ は } X \text{ の開集合} \}.$$

このとき、 $\mathcal{O}$ は以下をみたす.

(O1) $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$.

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば、 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) $O_\lambda \in \mathcal{O}$ ($\lambda \in \Lambda$) ならば、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

証明 (O1) はあきらかである.

(O2) O_1, O_2 を開集合とする. $p \in O_1 \cap O_2$ ならば、もちろん $p \in O_1$ だから、ある $\varepsilon_1 > 0$ がとれて $U(p, \varepsilon_1) \subset O_1$. 同様に、 $\varepsilon_2 > 0$ がとれて $U(p, \varepsilon_2) \subset O_2$ とできる. このとき、 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおけば、 $U(p, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ となるから、 $O_1 \cap O_2$ も開集合である.

(O3) すべての $\lambda \in \Lambda$ について O_λ は開集合とする. $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とすると、 $p \in O_{\lambda_0}$ である $\lambda_0 \in \Lambda$ が少なくともひとつ存在する. O_{λ_0} は開集合なので、 $U(p, \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$ をみたす $\varepsilon > 0$ がとれ、このとき $U(p, \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるから、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は開集合である. $\square$

近傍や開集合の概念によって、写像の連続性を特徴づけることができる. 実際、以下の二つの定理が成り立つ.

定理 6.7 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $p \in X$ について、次は同値である.

(i) f は p で連続である.

(ii) $f(p)$ の任意の近傍 V に対して、 $f^{-1}(V)$ は p の近傍である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): V を $f(p)$ の任意の近傍とすると、ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(f(p), \varepsilon) \subset V$. この ε に対して、(i) より、ある $\delta > 0$ がとれて、 $d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ が成り立つ. 下線部を書き換えると、 $x \in U(p, \delta)$ ならば $f(x) \in U(f(p), \varepsilon)$, すなわち $f(U(p, \delta)) \subset U(f(p), \varepsilon) \subset V$ となって、結局 $U(p, \delta) \subset f^{-1}(V)$ を得るが、このことは $f^{-1}(V)$ が p の近傍であることを示しているので、(ii) が導かれた.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $U(f(p), \varepsilon)$ は $f(p)$ の近傍なので、(ii) より、 $f^{-1}(U(f(p), \varepsilon))$ は p の近傍である. よって、ある $\delta > 0$ が存在して、 $U(p, \delta) \subset f^{-1}(U(f(p), \varepsilon))$ すなわ

ち, $f(U(p, \delta)) \subset U(f(p), \varepsilon)$ となっている. そこで, 前半の証明での推論を逆にたどれば, $d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ が得られ, f が p で連続であることが確かめられた. $\square$

定理 6.8 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は連続である.
- (ii) Y の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): f が連続であるとし, Y の開集合 O を任意にとる. 任意の $p \in f^{-1}(O)$ について, O は $f(p)$ の近傍だから, 定理 6.7 より, $f^{-1}(O)$ は p の近傍である. よって, 開集合の定義 6.2 より, $f^{-1}(O)$ は X の開集合であり, (ii) が示された.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $p \in X$ を任意にとる. $f(p)$ の任意の近傍 V に対して, 命題 6.5 から, $f(p) \in O \subset V$ をみたす Y の開集合 O がとれる. このとき $p \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$ であるが, 仮定 (ii) より, $f^{-1}(O)$ は X の開集合なので, 再び命題 6.5 から, $f^{-1}(V)$ は p の近傍である. よって, 定理 6.7 より, f は p で連続であり, (i) が得られた. $\square$

系 6.9 距離空間 X, Y の開集合系をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次は同値である.

- (i) f は同相写像である.
- (ii) f は全単射, かつ $\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} = \mathcal{O}_Y$

証明 f が全単射であるとき,

$$\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} \subset \mathcal{O}_Y \iff \text{「任意の } O \in \mathcal{O}_X \text{ に対して } f(O) \in \mathcal{O}_Y \text{」}$$

$$\{f(O) \mid O \in \mathcal{O}_X\} \supset \mathcal{O}_Y \iff \text{「任意の } O \in \mathcal{O}_Y \text{ に対して } f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X \text{」}$$

が成り立つ. 前定理より, これらはそれぞれ, f^{-1} が連続であること, f が連続であることと同値である. よって, 同相写像の定義 4.7 より (i), (ii) の同値性が確かめられた. $\square$

次に, 近傍, 開集合の概念が, 点列の収束とどのように係わるかを以下に述べる.

命題 6.10 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ と $x \in X$ について, 次は同値である.

- (i) $\{x_n\}$ は x に収束する.
- (ii) x の任意の近傍 V に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in V$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): V を x の任意の近傍とすると, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $U(x, \varepsilon) \subset V$ となっている. この ε に対して, (i) より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$. 最後の不等式は $x_n \in U(x, \varepsilon)$ を意味するから, 結局 $x_n \in V$ が得られ (ii) が導かれる.
(ii) $\Rightarrow$ (i): $\varepsilon > 0$ を任意にとる. ε -近傍 $U(x, \varepsilon)$ は x の近傍なので, (ii) より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in U(x, \varepsilon)$, すなわち $d(x_n, x) < \varepsilon$ だから (i) が示された. $\square$

定理 6.11 距離空間 (X, d) の部分集合 O について, 次は同値である.

- (i) O は開集合である.
- (ii) O の点に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n_0 \leq n$ ならば $x_n \in O$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in O$ に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を任意にとる. 仮定 (i) より O は x の近傍だから, 前命題より (ii) を得る.
(ii) $\Rightarrow$ (i): もし O が開集合でないとすると, ある $x \in O$ が存在して, どんな $\varepsilon > 0$ をとっても $U(x, \varepsilon) \not\subset O$ となっている. とくに, 各自然数 n に対して $x_n \in U(x, 1/n)$ かつ $x_n \notin O$ をみたとす x_n がとれる. このとき, $d(x_n, x) < 1/n$ より $\{x_n\}$ は x に収束する. よって 仮定 (ii) より, $x_n \in O$ となる n が存在し, $\{x_n\}$ のとり方に矛盾する. $\square$

最後に, 近傍や開集合の概念が, “距離の定める位相” によって定まることに注意する. 実際, 次の命題が成り立つ.

命題 6.12 集合 X 上の2つの距離 d, d' が同じ位相を定めているとする. このとき, $p \in X$ と $V \subset X$ について, V が d に関する p の近傍であることと, V が d' に関する p の近傍であることは同値である. また, $O \subset X$ について, O が d に関する開集合であることと, O が d' に対する開集合であることは同値である.

証明 d に関する ε -近傍と, d' に関する ε -近傍を, この証明では分けて考え, それぞれ $U(p, \varepsilon), U'(p, \varepsilon)$ としておく;

$$U(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, p) < \varepsilon\}, \quad U'(p, \varepsilon) = \{x \in X \mid d'(x, p) < \varepsilon\}.$$

いま, V が d に関する p の近傍とする. もし, d' に関しては p の近傍でないならば, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U'(p, 1/n) \not\subset V$ だから, $x_n \in U'(p, 1/n)$ かつ $x_n \notin V$ をみたとす $x_n \in X$ がとれる. このとき $d'(x_n, p) < 1/n$ だから, d' に関して $\{x_n\}$ は p に収束する. d と d' は同じ位相を定めるから, d に関して $\{x_n\}$ は p に収束している. よって, 命題 6.10 より, $x_n \in V$ となる n が存在し, x_n のとり方に反する. 以上より, V が d に関する p の近傍ならば, d' に関して p の近傍であることが示され, d, d' の役割を入れ替えれば, その逆も示されたことになる. 後半も, 開集合が近傍を用いて定義されていることからわかる. $\square$