

## §5. 部分空間と直積空間

**定義 5.1**  $(X, d_X)$  を距離空間とし,  $A \subset X$  とする.  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A \times A$  に制限して得られる  $A$  上の距離を  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  とするとき, 距離空間  $(A, d_A)$  を  $(X, d_X)$  の**部分距離空間**, または略して**部分空間**という.

**注意**  $d_X$  と  $d_A$  は実質的に同じものなので, 区別せずに記すことが多い.

**例 5.2**  $\mathbb{R}$  の部分空間について考える.

- (1) 閉区間  $[0, 1]$  と閉区間  $[0, 2]$  は同相である. 実際, 同相写像として  $f(x) = 2x$  をとることができる ( $g(x) = 2x^2$  も同相写像じゃん, と思った人はえらい!). 同様に, 开区間  $(0, 1)$  と开区間  $(0, 2)$  も同相である.
- (2) 一般に,  $a < b, c < d$  のとき, 閉区間  $[a, b]$  と閉区間  $[c, d]$  は同相であり, 开区間  $(a, b)$  と开区間  $(c, d)$  は同相である.
- (3)  $f(x) = e^{-x}$  は, 区間  $(0, \infty)$  から  $(0, 1)$  への同相写像であり,  $g(x) = \log x$  は,  $(0, \infty)$  から  $\mathbb{R}$  への同相写像だから,  $(0, 1), (0, \infty), \mathbb{R}$  は互いに同相である.
- (4) 一般に, 実数  $a, b, c$  について,  $a < b$  ならば, 开区間

$$(a, b), (c, \infty), (-\infty, c), (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

はどれも互いに同相である.

- (4) 閉区間  $[0, 1]$  と开区間  $(0, 1)$  は同相ではない. この証明はちょいムズなので, もう少し学習が進んでから証明いたしましょう.
- (5) 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  を  $\mathbb{R}$  の部分空間とみなす. 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $x$  に収束する  $\mathbb{Q}$  の点列  $\{a_n\}$  が存在する. そのような点列は  $\mathbb{Q}$  において収束するとは限らない (たとえば  $x = \sqrt{2}$  を考えてみよ).
- (6) 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  を  $\mathbb{R}$  の部分空間とみなすと, その距離は離散距離と同じ位相を定める. このことは, 命題 3.10 (の証明) から確かめることができる.

**定義 5.3**  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  を距離空間とするとき, 直積集合  $X \times Y$  上の実数値関数  $d, d_2, d_\infty$  をそれぞれ以下のように定める.

$$\begin{aligned} d((x, y), (x', y')) &= d_X(x, x') + d_Y(y, y'), \\ d_2((x, y), (x', y')) &= \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}, \\ d_\infty((x, y), (x', y')) &= \max \{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} \end{aligned}$$

**命題 5.4** 前定義における,  $d, d_2, d_\infty$  は  $X \times Y$  上の距離であり, さらにこれらは同じ位相を定める.

**証明**  $d, d_2, d_\infty$  がそれぞれ  $X \times Y$  上の距離であること確かめるのは難しくない. また,

$$d_\infty((x, y), (x', y')) \leq d_2((x, y), (x', y')) \leq d((x, y), (x', y')) \leq 2d_\infty((x, y), (x', y'))$$

が成り立つことも簡単に示すことができるから, 命題 3.4 によって結論を得る.  $\square$

**定義 5.5** 定義 5.3 において, 距離空間  $(X \times Y, d)$  を  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  の**積空間**, または**直積空間**という.

この定義では  $X \times Y$  上の距離として  $d$  を採用したが, 命題 5.4 により,  $d_2$  や  $d_\infty$  を採用しても, 収束や連続にかかわる性質 (位相的性質とよばれる) は変わらない.

さて, 集合  $X$  上の距離は積空間  $X \times X$  上の関数であった. その連続性について以下の命題が成り立つ (例 4.2 と比較せよ).

**命題 5.6** 距離空間  $(X, d_X)$  上の距離  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  は積空間  $(X \times X, d)$  上の連続関数である.

**証明**  $(x, y) \in X \times X$  を任意にとる. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

ある  $\delta > 0$  が存在して,

$$(*) \quad d_X((x, y), (x', y')) < \delta \text{ をみたすすべての } (x', y') \in X \times X \text{ について} \\ |d_X(x, y) - d_X(x', y')| < \varepsilon$$

であることをいえばよい. いま, 三角不等式を二度使えば

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, x') + d_X(x', y) \leq d_X(x, x') + (d_X(x', y') + d_X(y', y))$$

が成り立つから,  $d_X(x', y')$  を移行して,

$$d_X(x, y) - d_X(x', y') \leq d_X(x, x') + d_X(y, y') = d((x, y), (x', y')).$$

$(x, y)$  と  $(x', y')$  の役割を入れ替えれば,

$$d_X(x', y') - d_X(x, y) \leq d((x', y'), (x, y))$$

もいえるから, 結局

$$|d_X(x, y) - d_X(x', y')| \leq d((x, y), (x', y'))$$

が導かれる. よって,  $\delta = \varepsilon$  ととることで, 目標であった  $(*)$  を得る.  $\square$

**命題 5.7** 距離空間  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  の積空間  $(X \times Y, d)$  の点  $(x, y)$  および点列  $\{(x_n, y_n)\}$  について, 次は同値である.

- (i)  $\{(x_n, y_n)\}$  は  $(x, y)$  に収束する.
- (ii)  $\{x_n\}$  は  $x$  に収束し, かつ  $\{y_n\}$  は  $y$  に収束する.

**証明** (i) を仮定すると,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $d((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$  である.  $d$  の定義から  $d_X(x_n, x) \leq d((x_n, y_n), (x, y))$  だから,  $d_X(x_n, x) \rightarrow 0$ , したがって  $x_n \rightarrow x$ , 同様にして  $y_n \rightarrow y$  が得られ, (i) が導かれる.

逆に (ii) を仮定すれば,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $d_X(x_n, x) \rightarrow 0$  かつ  $d_Y(y_n, y) \rightarrow 0$  だから,  $d((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$ , すなわち (i) を得る.  $\square$

**系 5.8**  $X, Y, Z$  を距離空間とし, 写像  $F: Z \rightarrow X \times Y$  を考える.  $F$  を成分ごとに  $F(z) = (F_X(z), F_Y(z))$  と表すとき,  $F$  が連続であるためには,  $F_X, F_Y$  がどちらも連続であることが必要十分である.

**証明**  $F$  が連続であるとする. 定理 4.5 より,  $Z$  の点列  $\{z_n\}$  が  $z \in Z$  に収束するならば,  $F(z_n) = (F_X(z_n), F_Y(z_n))$  は  $F(z) = (F_X(z), F_Y(z))$  に収束する. したがって前命題より,  $F_X(z_n)$  は  $F_X(z)$  に収束し,  $F_Y(z_n)$  は  $F_Y(z)$  に収束する. よって再び定理 4.5 を適用して,  $F_X, F_Y$  どちらも連続であることが導かれ, 必要性が示された. 逆をたどれば十分性も確かめられる.  $\square$

**注意** この系は, 写像  $F: Z \rightarrow X \times Y$  の連続性が成分ごとの写像の連続性に帰着されることを示している. 逆向きの写像  $G: X \times Y \rightarrow Z$  についても,  $G$  が連続ならば, 成分ごとの連続性, すなわち

- 任意の  $x_0 \in X$  について,  $g_Y: Y \rightarrow Z, y \mapsto G(x_0, y)$  は連続であり,
- (\*) かつ
- 任意の  $y_0 \in Y$  について,  $g_X: X \rightarrow Z, x \mapsto G(x, y_0)$  は連続である

が成り立つ. しかし, 逆は一般には成り立たない. つまり (\*) が成り立っても,  $G$  が連続であるとは限らない.

**例 5.9**  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$G(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき,} \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めると, (\*) が成り立つ. しかし,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0)$  であるにもかかわらず  $G(1/n, 1/n) = 1/2 \not\rightarrow 0$  となるから,  $G$  は連続ではない.

以上の議論は、3つ以上有限個の距離空間  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$  の積空間に自然に拡張される。念のため、積空間の定義を書いておく。

**定義 5.10**  $n$  を 2 以上の自然数とする。  $n$  個の距離空間  $(X_i, d_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して、直積集合

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, \dots, n) \}$$

上の距離  $d$  を

$$d((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, x'_i)$$

によって定義することができる。距離空間  $\left(\prod_{i=1}^n X_i, d\right)$  を  $(X_i, d_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の積空間または直積空間という。

さらに、可算無限個の距離空間の積空間も、ある条件の下で定義することが可能であるが、この講義では扱わないつもりである。

最後に、データ・サイエンスにおいて、データ間の「違い」を表す尺度として使われる距離を紹介する。

**定義 5.11 (ハミング距離)** 2つの元からなる集合  $B = \{0, 1\}$  を考える。自然数  $n$  に対し、離散距離空間  $(B, \rho)$  の  $n$  個の積空間を  $(B^n, h_n)$  とすると、

$$h_n((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \text{“} a_i \neq b_i \text{ である } i \text{ の個数”}$$

となっている。  $B^n$  の元は、  $0, 1$  からなる長さ  $n$  の数列（ビット列という）とみなすことができ、ビット列  $a, b \in B^n$  に対して、  $h_n(a, b)$  は異なる値をもつビット（位置）の個数になっている。たとえば、  $B^8$  の元  $a = 01101001, b = 01001101$  の間の距離は  $h_8(a, b) = 2$  である。実際、前から3番目と6番目のビット値が異なり他のビット値は等しい、つまり、矢印  $\uparrow$  で示された2ヶ所でのみ値が異なる。

$$\begin{array}{cccccccc} a & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & & \end{array}$$

距離  $h_n$  は（長さ  $n$  の）ハミング距離とよばれ、符号理論、機械学習などのデータ・サイエンスにおいて基本的なツールとなっている。しかし、ハミング距離は収束や連続性などの位相的な性質とは直接関係しないので、今後この講義では深入りしない。