

§4. 連続写像

定義 4.1 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $x_0 \in X$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が下記の $(*)$ をみたすとき, f は x_0 で**連続**であるという.

$$(*) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ d_X(x, x_0) < \delta \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

X のすべての点で f が連続であるとき, f は**連続写像**であるという. $Y = \mathbb{R}$ かつ d_Y が $\mathbb{R}$ の通常の距離であるとき, f を**連続関数**とよぶことが多い.

例 4.2 (X, d) を距離空間とし, 点 $p \in X$ をひとつ固定する. $x \in X$ に対して $f_p(x) = d(x, p)$ とおくと, $f_p: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数である. これを確かめるために, $x_0, x \in X$ のとき, 三角不等式より

$$|f_p(x) - f_p(x_0)| = |d(x, p) - d(x_0, p)| \leq d(x, p) + d(p, x_0) \leq d(x, x_0)$$

が成り立つことに注意する. そこで, 任意の ε に対して, $\delta = \varepsilon$ ととれば, $d(x, x_0) < \delta$ をみたすすべての $x \in X$ について, $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つことがわかり, f_p が x_0 で連続であることが確かめられた.

例 4.3 離散距離空間 (例 2.3) から任意の距離空間への任意の写像は連続である. これは以下のようにして確かめられる. (X, ρ) を離散距離空間とし, 距離空間 (Y, d) と写像 $f: X \rightarrow Y$ を任意にとる. $x_0, x \in X$ のとき, $\rho(x, x_0) < 1$ ならば $\rho(x, x_0) = 0$, すなわち $x = x_0$ なので, 当然 $d(f(x), f(x_0)) = 0$ となる. つまり, $x_0 \in X$ のとき,

$$\text{どのような } \varepsilon > 0 \text{ に対しても, } \delta = 1 \text{ ととれば,} \\ \rho(x, x_0) < \delta \text{ であるすべての } x \in X \text{ について } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立ち, f の x_0 での連続性が示されたことになる.

命題 4.4 $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ を距離空間, $x_0 \in X$ とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が x_0 で連続, かつ写像 $g: Y \rightarrow Z$ が $f(x_0)$ で連続ならば, 合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は x_0 で連続である. とくに, f, g が連続写像ならば $g \circ f$ は連続写像である.

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. g は $f(x_0)$ で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\#) \quad d_Y(y, f(x_0)) < \delta \text{ をみたすすべての } y \in Y \text{ について } d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$$

が成り立つ. さらに, f は x_0 で連続だから, この δ に対して, ある $\gamma > 0$ が存在して

$$d_X(x, x_0) < \gamma \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$$

が成り立つが, 最後の不等式は $(\#)$ を用いて, $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$ と書き換えることができる. 以上をまとめれば,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\gamma > 0$ が存在して,

$$d_X(x, x_0) < \gamma \text{ をみたすすべての } x \in X \text{ について } d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon$$

すなわち, $g \circ f$ の x_0 での連続性が示された. $\square$

定理 4.5 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $x_0 \in X$ とするとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ について, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は x_0 で連続である.

(ii) x_0 に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して, Y の点列 $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): f が x_0 で連続であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ について

$$(b) \quad d_X(x, x_0) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

となっている. (ii) を示すために, x_0 に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を考えると, 上でとった δ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて,

$$n_0 \leq n \text{ ならば } d_X(x_n, x_0) < \delta$$

をみたすが, (b) より, 最後の不等式は $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ と書き換えることができる. よって, $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 対偶を示す. (i) が成り立たないとする. ある $\varepsilon > 0$ が存在して, どんな $\delta > 0$ をとっても, ある $x \in X$ が存在して,

$$「d_X(x, x_0) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon」 \text{ が成り立っていない,}$$

すなわち,

$$「d_X(x, x_0) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon」 \text{ が成り立つ.}$$

とくに $\delta = 1/n$ をとったときの $x \in X$ を x_n とする. このとき $d_X(x_n, x_0) < 1/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より $\{x_n\}$ は x_0 に収束する. 一方で, すべての n に対して $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ だから, $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束しない. よって, (ii) は成り立たない. $\square$

定理 4.5 により, 写像の連続性は, 距離そのものに依存するのではなく, “距離の定める位相” のみに依存することがわかる. すなわち, 次が成り立つ.

系 4.6 d_X, d'_X が集合 X 上の距離で同じ位相を定め、 d_Y, d'_Y が集合 Y 上の距離で同じ位相を定めるならば、写像 $f: X \rightarrow Y$ と $x_0 \in X$ に対して、次は同値である。

- (i) f は x_0 で、 X の距離 d_X と Y の距離 d_Y に関して連続
- (ii) f は x_0 で、 X の距離 d'_X と Y の距離 d'_Y に関して連続

定義 4.7 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。 f が全単射であり、逆写像 f^{-1} も連続であるとき、 f を**同相写像**という。 X から Y への同相写像が存在するとき、 (X, d_X) と (Y, d_Y) は**同相**であるという。

注意 同相であることも“距離の定める位相”だけによる概念である。すなわち、系 4.6 の記法の下で、 (X, d_X) と (Y, d_Y) が同相であることと、 (X, d'_X) と (Y, d'_Y) が同相であることは同値である。

定義 4.8 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。すべての $x, x' \in X$ に対して $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つとき、 f を**等長写像**という。

命題 4.9 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、 $f: X \rightarrow Y$ を等長写像とする。

- (1) f は単射である。
- (2) f は連続写像である。
- (3) もし f が全射ならば、 f は同相写像である。

証明 (1) $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ をみたすとする、 $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0$ より $x = x'$ を得る。

(2) $x_0 \in X$ および x_0 に収束する X の点列 $\{x_n\}$ を任意にとると、

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) = d_X(x_n, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから、 $\{f(x_n)\}$ は $f(x_0)$ に収束する。よって、定理 4.5 より f は x_0 で連続である。任意の $x_0 \in X$ で f は連続なので、 f は連続写像である。

(3) f が全射のとき、(1) より f は全単射であり、その逆写像 f^{-1} が定義できる。(2) より f は連続であるが、あきらかに f^{-1} も等長写像であるから f^{-1} も連続である。よって、 f は同相写像である。 $\square$