

§3. 点列の収束

X を集合とする. X の点列とは, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から X への写像のことであり, 各 $n \in \mathbb{N}$ の像を $x_n \in X$ とするとき, $\{x_n\}$ と表すのがふつうである.

定義 3.1 (X, d) を距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ と $x \in X$ が下記の (*) をみたすとき, $\{x_n\}$ は x に**収束**するという.

$$(*) \quad \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } n_0 \in \mathbb{N} \text{ が存在して,} \\ n_0 \leq n \text{ ならば } d(x_n, x) < \varepsilon \end{array}$$

このとき, x を点列 $\{x_n\}$ の**極限**という.

注意 点列 $\{x_n\}$ が x に収束することと, 数列 $\{d(x_n, x)\}$ が 0 に収束することは同値である.

定理 3.2 距離空間において, 収束する点列の極限は一意的に定まる. すなわち, (X, d) を距離空間とし, X の点列 $\{x_n\}$ が $x, y \in X$ のどちらにも収束するならば, $x = y$ が成り立つ.

証明 $x \neq y$ と仮定して矛盾を導く. いま $\varepsilon = d(x, y)/2$ とおくと, $x \neq y$ より $\varepsilon > 0$ である. $\{x_n\}$ は x に収束するから, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_1 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$. 一方, y にも収束するから, ある $n_2 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_2 \leq n$ ならば $d(x_n, y) < \varepsilon$. そこで $m = \max\{n_1, n_2\}$ とおけば, $d(x_m, x) < \varepsilon$ かつ $d(x_m, y) < \varepsilon$ となるので, $2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < 2\varepsilon$ となって矛盾する. $\square$

収束する点列 $\{x_n\}$ の極限が x であるとき,

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{あるいは} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

などと表すことがある.

定義 3.3 d_1, d_2 を集合 X 上の2つの距離とする. X の任意の点 x および点列 $\{x_n\}$ に対して, 次の (i) と (ii) が同値であるとき, d_1 と d_2 は**同じ位相を定める**という.

(i) (X, d_1) において $\{x_n\}$ は x に収束する, すなわち $d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

(ii) (X, d_2) において $\{x_n\}$ は x に収束する, すなわち $d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

命題 3.4 d_1, d_2 を集合 X 上の2つの距離とする. もし, ある実数 $\lambda, \mu > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\lambda d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \mu d_1(x, y)$$

が成り立つならば, d_1, d_2 は同じ位相を定める.

証明 X の点列 $\{x_n\}$ および点 x を任意にとる. $n \rightarrow \infty$ のとき, $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ と仮定すると, $d_2(x_n, x) \leq \mu d_1(x_n, x)$ より $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ となる. 一方で, $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$ と仮定すると, $d_1(x_n, x) \leq \lambda^{-1} d_2(x_n, x)$ より $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ を得る. よって, d_1, d_2 は同じ位相を定める. $\square$

系 3.5 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ を V の2つのノルムとする. もし, ある実数 $\lambda, \mu > 0$ が存在して, 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して

$$\lambda \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|' \leq \mu \|\mathbf{v}\|$$

ならば, $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ から定まる V 上のそれぞれの距離は同じ位相を定める.

例 3.6 有限集合 X 上の距離 d はつねに離散距離 ρ と同じ位相を定める (例 2.3 参照). 実際, $\{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$ の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とすれば, $0 < m \leq M$ であって, $m\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq M\rho(x, y)$ がすべての $x, y \in X$ について成り立つから, 命題 3.4 より d と ρ は同じ位相を定める.

例 3.7 $\mathbb{R}^n$ のノルム $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$) および $\|\cdot\|_\infty$ について考える (例 2.6 参照). $p > 1$ のとき, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ について

$$\frac{1}{n} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_1$$

が成り立つことが以下のようにして確かめられる. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする.

- (左の不等式): $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq n \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = n\|\mathbf{x}\|_\infty$ を n で割ればよい.
- (真ん中の不等式): $\|\mathbf{x}\|_\infty^p \leq |x_1|^p + \dots + |x_n|^p = \|\mathbf{x}\|_p^p$ の p 乗根をとればよい.
- (右の不等式): $\|\mathbf{x}\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^p = \|\mathbf{x}\|_1^p$ の p 乗根をとればよい.

よって, 系 3.5 より, $1 \leq p \leq \infty$ のとり方に関わらず, $\|\cdot\|_p$ から定まる $\mathbb{R}^n$ 上の距離はどれも同じ位相を定める.

例 3.8 $C[0, 1]$ のノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ について考える (例 2.7 参照). $f_n(x) = x^n$ で定義された $f_n \in C[0, 1]$ について,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるが, $\|f_n\|_\infty = \max \{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\} = 1$ であるから, $\|\cdot\|_1$ から定まる距離と $\|\cdot\|_\infty$ から定まる距離は同じ位相を定めない.

定義 3.9 集合 X 上の距離 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ の像 $d(X \times X)$ が $\mathbb{R}$ において有界集合であるとき, d は有界であるという. すなわち, d が有界であるとは, ある $M > 0$ が存在して, すべての $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \leq M$ が成り立つことである.

命題 3.10 任意の距離空間 (X, d) に対して, d と同じ位相を定める X 上の有界な距離が存在する.

証明 $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ と定める.

(1) d' が X 上の距離であること: d' が定義 2.1 の性質 (D1)–(D3) をみたすことを確かめればよい. (D1) と (D2) はすぐにわかるので, 以下, (D3) すなわち三角不等式

$$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

がすべての $x, y, z \in X$ に対して成り立つことを示す. $d(x, y), d(y, z)$ が 1 より大きいかどうかで場合分けする.

- 「 $d(x, y) > 1$ または $d(y, z) > 1$ のとき」 $d'(x, y) = 1$ または $d'(y, z) = 1$ だから,

$$d'(x, z) = \min\{d(x, z), 1\} \leq 1 \leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

- 「 $d(x, y) \leq 1$ かつ $d(y, z) \leq 1$ のとき」 $d'(x, y) = d(x, y)$ かつ $d'(y, z) = d(y, z)$ だから, d についての三角不等式を用いて

$$d'(x, z) = \min\{d(x, z), 1\} \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d'(x, y) + d'(y, z)$$

(2) d' が有界であること: すべての $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) \leq 1$ からわかる.

(3) d, d' が同じ位相を定めること: X の任意の点列 $\{x_n\}$ と点 x に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $d(x_n, x) \rightarrow 0$ と $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ が同値であることを示せばよい.

- まず, $d(x_n, x) \rightarrow 0$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_0 \leq n$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon$ となる. よって, $d'(x_n, x) = \min\{d(x_n, x), 1\} \leq d(x_n, x) < \varepsilon$ がいて, $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ が導かれた.

- 次に, $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ を仮定する. 任意の ε に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ がとれて, $n_1 \leq n$ ならば $d'(x_n, x) < \min\{\varepsilon, 1\}$ が成り立つようにできる. 最後の不等式から, $d'(x_n, x) < 1$ かつ $d'(x_n, x) < \varepsilon$ がいえるが, 前者から $d'(x_n, x) = d(x_n, x)$ が得られ, 後者とあわせて $d(x_n, x) < \varepsilon$ が導かれる. よって $d(x_n, x) \rightarrow 0$ が示された. $\square$