

§2. 距離空間

定義 2.1 X を集合とする. 関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は, 以下の (D1), (D2), (D3) をみたすとき, X 上の距離または距離関数といい, (X, d) を距離空間という.

(D1) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であって, 「 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 」.

(D2) 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (三角不等式という).

例 2.2 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には, 前節で述べたように距離 d が定義されていて, $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間となっている. 同様にして,

$$\mathbb{C}^n = \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \}$$

においても, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2}$$

と定めれば, $d: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の距離であり, $(\mathbb{C}^n, d)$ は距離空間となる.

例 2.3 (離散距離) 任意の集合 X 上に $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}), \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定めると, ρ は X 上の距離となる. これを離散距離といい, 距離空間 (X, ρ) を離散距離空間という.

定義 2.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 各 $\mathbf{v} \in V$ に対して, 実数 $\|\mathbf{v}\|$ が定まっていて, 以下の (N1), (N2), (N3) がみたされるとき, 関数 $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ をノルムといい ($\|\mathbf{v}\|$ を $\mathbf{v}$ のノルムということが多い), $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間という (そのまんまだけど, ノルムが定義された空間ということもある).

(N1) 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して, $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ であって, 「 $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 」.

(N2) 任意の $\mathbf{v} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$.

(N3) 任意の $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対して, $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

補題 2.5 $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とすると,

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

は V 上の距離であり, (V, d) は距離空間となる.

証明 定義 2.4 にある性質 (N1)–(N3) から, 定義 2.1 の性質 (D1)–(D3) がそれぞれ導かれることを確かめる.

(D1): $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ならば, (N1) より $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq 0$ かつ, $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(D2): 任意の $\mathbf{v} \in V$ について, (N2) より $\|-\mathbf{v}\| = |-1| \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ だから, $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

(D3): V の 3 つの元 $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ に対して, (N3) より $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| \geq \|(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{z})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{v}, \mathbf{z})$. $\square$

例 2.6 実数 $p \geq 1$ をひとつ固定する. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定めれば, $\|\cdot\|_p$ は $\mathbb{R}^n$ のノルムとなることが知られている. 一般の $p \geq 1$ について $\|\cdot\|_p$ が $\mathbb{R}^n$ のノルムであること (とくに (N3)) の証明は簡単ではない. しかし, $p = 2$ の場合は前節で定義した意味でのノルムと一致し, 命題 1.1 の証明を参考にすれば, $\|\cdot\|_2$ がノルムであることが証明できるであろう. $p = 1$ のとき, すなわち

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

は**絶対値ノルム**とよばれる. さらに, $p \rightarrow \infty$ と考えて,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

と定めれば, $\|\cdot\|_\infty$ も $\mathbb{R}^n$ のノルムとなる. これを**最大値ノルム**という. $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ がノルムであることの証明は難しくない.

例 2.7 $C[0, 1]$ を区間 $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ で定義された実数値連続関数全体の作る $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 実数 $p \geq 1$ をひとつとり, $f \in C[0, 1]$ に対して

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定めると, $C[0, 1]$ のノルムとなる. また,

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1 \}$$

もノルムとなる.