

§1. ユークリッド空間の位相

$\mathbb{R}$ は実数直線, $\mathbb{R}^2$ は平面, $\mathbb{R}^3$ は空間であるが, これを一般化して

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

を n 次元ユークリッド空間と呼ぶ. 集合を幾何学的な対象とみなすとき, その集合の元を点と呼ぶ習慣がある. この講義でもそれに倣い, $\mathbb{R}^n$ の元のことを点と呼ぶことがある.

$\mathbb{R}^n$ の2つの点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

をそれぞれ, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の内積, $\mathbf{x}$ のノルムという. さらに,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$$

を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の距離という. $n = 1$ のときは $d(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$) である.

命題 1.1 任意の点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つ.

- (1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であって, 「 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ 」.
- (2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- (3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

証明 (1), (2) は定義からすぐにわかるので (3) だけ証明する. $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ とおけば, 示すべき不等式は, $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ と同値である. さらに,

$$(\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 - \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| - (\mathbf{v}, \mathbf{w}))$$

が成り立つから, $\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \geq (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を確かめればよい. いま, 実数 t について

$$\|t\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w})t + \|\mathbf{w}\|^2$$

を考えると, これは常に正であるから, t に関する2次式としての判別式 D は0以下である. よって, $D/4 = (\mathbf{v}, \mathbf{w})^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \leq 0$, ゆえに, $\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \geq |(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \geq (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ を得る. $\square$

数列とは, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上で定義された実数値関数のことであり, ふつう, 各 $j \in \mathbb{N}$ の像 $x_j \in \mathbb{R}$ を用いて $\{x_j\}$ と表される. これを拡張して, $\mathbb{N}$ からユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への写像 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の点列という. 各 $j \in \mathbb{N}$ の像が $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ であるとき, この点列を $\{\mathbf{x}_j\}$ で表す.

定義 1.2 $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_j\}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ が下記の (*) をみたすとき, $\{x_j\}$ は x に収束するという.

- (*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して,
 $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \varepsilon$

定義 1.3 $x \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 r に対して,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$$

と定め, x を中心とする半径 r の開球体という.

定義 1.4 U を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. 任意の $x \in U$ に対して $B(x, \varepsilon) \subset U$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在するとき, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合という.

補題 1.5 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_j\}$ が U の点に収束しているとする. このとき, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, $k \leq j$ ならば $x_j \in U$ が成り立つ.

証明 $\{x_j\}$ が $x \in U$ に収束しているとする. U は開集合だから, $B(x, \varepsilon) \subset U$ をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する. さらに, この ε に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ が取れて, $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \varepsilon$, すなわち $x_j \in B(x, \varepsilon)$ が成り立つが, $B(x, \varepsilon) \subset U$ であったから $x_j \in U$ を得る. $\square$

定義 1.6 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数 (すなわち U から $\mathbb{R}$ への写像) とする. $x \in U$ が下記の (*) をみたすとき, f は x で連続であるという.

- (*) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
 $d(y, x) < \delta$ であるすべての $y \in U$ について $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

さらに, U のすべての点で f が連続であるとき, f は連続であるという.

補題 1.7 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, $x \in U$ とする. 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ が x で連続ならば, x に収束する U 内の任意の点列 $\{x_j\}$ について, 数列 $\{f(x_j)\}$ は $f(x)$ に収束する.

証明 U 内の点列 $\{x_j\}$ が x に収束しているとする. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. f は x で連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $d(y, x) < \delta$ をみたすすべての $y \in U$ に対して $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立っている. 一方, $\{x_j\}$ は x に収束しているので, この δ に対して, ある $k \in \mathbb{N}$ がとれて, $k \leq j$ ならば $d(x_j, x) < \delta$, よって $|f(x_j) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立ち題意が示された. $\square$