集合と論理 中間試験問題 Nov. 5, 2026 (中野 伸)

注意: 結論だけでなく，結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと，
また，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ はそれぞれ自然数全体，整数全体，実数全体の集合である．

[1] 自然数 n に対して

$$A_n = \{\, x \,|\, x \in \mathbb{N} \text{ かつ } x \leq n \,\},$$

$$B_n = \{\, x \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ かつ } n-1 < x \leq n+1 \,\}$$

とおくとき，以下の (1)-(4) で表される集合をそれぞれ求めよ．

(1) $A_5 \cap B_4$ (2) $A_7 \setminus B_7$ (3) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (4) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

[2] 実数 x と自然数 n に関する条件 $\mathrm{A}(x,n)$ に対して，2 つの命題

P: 「ある自然数 n が存在して「任意の実数 x に対して $\mathrm{A}(x,n)$」」

Q: 「任意の実数 x に対して「ある自然数 n が存在して $\mathrm{A}(x,n)$」」

を考える． 次の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $\mathrm{A}(x,n)$ が「$x^2 + nx + n > 0$」であるとき，P は真であることを示せ．

(2) P は偽，かつ Q は真であるような $\mathrm{A}(x,n)$ の例をひとつ与えよ．

[3] 以下のそれぞれの命題の否定を書け． ただし，(1) においては，P, Q は与えられた命題とし，(2), (3) においては，f, g は与えられた実数値 2 変数関数とする．

(1) 「P または「Q でない」」

(2) 「実数 x が無理数ならば 「任意の自然数 n に対して $f(n,x) \notin \mathbb{Z}$」」

(3) 「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n,x) > nx$」

[4] 2 変数論理関数 $f(x,y) = (\overline{x \vee y}) \vee (x \wedge y)$ について，以下の問に答えよ．

(1) 恒等式 $f(x,y) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)$ を証明せよ．

(2) $f(x,y) = 1$ ならば $x = y$ であることを示せ．