

集合と論理 試験問題

Jan. 26, 2024 (中野 伸)

注意: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ はそれぞれ自然数全体, 整数全体, 実数全体の集合である.

- [1] $m, n \in \mathbf{Z}$ に関する命題 $P(m, n)$ に対して, 以下の命題 [A], [B] を考える.

[A] 「整数 n が存在して, 「任意の整数 m に対して $P(m, n)$ である」」

[B] 「任意の整数 m に対して, 「 $P(m, n)$ である整数 n が存在する」」

次の問いにそれぞれ答えよ.

- (1) [A] が成り立つような命題 $P(m, n)$ の例をひとつ与えよ.
- (2) [B] が成り立ち, かつ [A] が成り立たないような命題 $P(m, n)$ の例をひとつ与えよ.

- [2] 集合の濃度に関する以下の命題をそれぞれ証明せよ.

- (1) 任意の集合 A に対して, $|A| \leq |A \times A|$ が成り立つ.
- (2) $|\mathbf{N} \times \mathbf{R}| = |\mathbf{R}|$ が成り立つ.
- (3) $|A_1| = |A_2| = |A_3| = \cdots = |\mathbf{R}|$ ならば, $\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right| = |\mathbf{R}|$ が成り立つ.

- [3] $\mathbf{N}$ から区間 $(0, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ への全射は存在しないことを, 対角線論法を用いて示せ.

- [4] $n \in \mathbf{N}$ に対して, n 以上の自然数全体の集合を $\mathbf{N}_n$ とし, $\mathbf{N}_n$ 上の関係 $\sim$ を, 「 $a \sim b \Leftrightarrow$ 整数 $a - b$ は 5 の倍数」によって定める.

- (1) $\sim$ は $\mathbf{N}_n$ 上の同値関係であることを示せ.
- (2) $n = 8$ のとき, $\mathbf{N}_8$ 上の同値関係 $\sim$ に関する完全代表系を一組与えよ.
- (3) $f_n : \mathbf{N}_n \rightarrow \mathbf{N}_n / \sim$ を自然な全射とする. $m > n$ をみたす任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して, 写像

$$g : \mathbf{N}_m / \sim \longrightarrow \mathbf{N}_n / \sim, \quad f_m(a) \mapsto f_n(a) \quad (\text{ただし } a \in \mathbf{N}_m)$$

は全単射であることを示せ.