

6 原始帰納的述語

[I] 特性関数

自然数の変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する述語 (命題) $A(x_1, \dots, x_n)$ について、

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & A(x_1, \dots, x_n) \text{ が成り立つとき,} \\ 1 & A(x_1, \dots, x_n) \text{ が成り立たないとき,} \end{cases}$$

によって定まる関数 f を A の**特性関数**という。特性関数が原始帰納的であるような述語を**原始帰納的述語**という。

- $x = y$ および $x \neq y$ は原始帰納的述語である;

$$x = y \iff \text{sg}(|x - y|) = 0$$

$$x \neq y \iff \overline{\text{sg}}(|x - y|) = 0$$

- $x \leq y$ は原始帰納的述語である;

$$x \leq y \iff \text{sg}(x \smile y) = 0$$

- $x < y$ は原始帰納的述語である;

$$x < y \iff 1 \smile (y \smile x) = 0$$

- “ x は y で割り切れる” は原始帰納的述語である;

$$x \text{ は } y \text{ で割り切れる} \iff \text{rem}(x, y) = 0$$

$$\iff \text{sg}(\text{rem}(x, y)) = 0$$

- $x \equiv y \pmod{m}$ は原始帰納的述語である;

$$x \equiv y \pmod{m} \iff \text{rem}(x, m) = \text{rem}(y, m)$$

$$\iff \text{sg}(\text{rem}(|x - y|, m)) = 0$$

- “ x は素数である” は原始帰納的述語である;

$$x \text{ は素数} \iff \text{Prime}(x) = 0$$

- “ x は平方数である” (すなわち、 $x = y^2$ をみたす $y > 1$ が存在する) は原始帰納的述語である;

$$x \text{ は平方数} \iff \sum_{p=2}^x \overline{\text{sg}}(|\nu(p, x) - 2|) \cdot \overline{\text{sg}}(\text{Prime}(p)) > 0$$

- 異なる素数 p, q が与えられたとき、“ x の素因数は p, q のみである” は原始帰納的述語である;

$$x \text{ の素因数は } p, q \text{ のみである} \iff \text{spf}(x) = pq$$

[II] NOT, AND, OR

述語 $A(x_1, \dots, x_n)$, $B(x_1, \dots, x_n)$ の特性関数をそれぞれ $g(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n)$ とするとき、

$$\overline{\text{sg}}(g(x_1, \dots, x_n)),$$

は “ A でない” の特性関数であり、さらに

$$\text{sg}(g(x_1, \dots, x_n) + h(x_1, \dots, x_n)), \quad g(x_1, \dots, x_n) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$

はそれぞれ “ A かつ B ”, “ A または B ” の特性関数である。したがって、次の定理が得られる。

定理 6-1 述語 A, B が原始帰納的ならば、

$$A \text{ でない}, \quad A \text{ かつ } B, \quad A \text{ または } B$$

も原始帰納的述語である。

[III] 場合分けによる関数の定義

自然数の変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する m 個の述語

$$A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_m(x_1, \dots, x_n)$$

で、任意の $x_1, \dots, x_n$ に対して、 $A_i(x_1, \dots, x_n)$ のうち 2 つは同時に成り立たないようなものを一組固定する。さらに m 個の関数

$$g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$$

をとって、

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & A_1(x_1, \dots, x_n) \text{ が成り立つとき,} \\ \vdots & \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n), & A_m(x_1, \dots, x_n) \text{ が成り立つとき,} \\ 0, & \text{どれも成り立たないとき,} \end{cases}$$

によって定まる関数 f を、 $A_1, \dots, A_m$ および $g_1, \dots, g_m$ から場合分けによって定義された関数という。

いま A_i の特性関数を h_i とすれば、

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m g_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \overline{\text{sg}}(h_i(x_1, \dots, x_n))$$

が成り立つ。したがって、次の定理を得る。

定理 6-2 原始帰納的述語 $A_1, \dots, A_m$ および 原始帰納的関数 $g_1, \dots, g_m$ から場合分けによって定義された関数 f は、原始帰納的関数である。

[IV] 有界最小化

自然数の $n+1$ 変数の述語 $A(y, x_1, \dots, x_n)$ に対して

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = \min \{ y \mid A(y, x_1, \dots, x_n) \text{ または } y > t \}$$

なる $n+1$ 変数関数 f を A に関する**有界最小化**といい

$$\mu_{y \leq t} [A(y, x_1, \dots, x_n)]$$

で表す。すなわち $\mu_{y \leq t} [A(y, x_1, \dots, x_n)]$ は、 $y \leq t$ かつ $A(y, x_1, \dots, x_n)$ なる y が存在するならばその最小値、存在しないならば $t+1$ を値とする関数である。

定理 6-3 原始帰納的述語に関する有界最小化は原始帰納的関数である。

[証明] A の特性関数を h とすると

$$\mu_{y \leq t} [A(y, x_1, \dots, x_n)] = \sum_{z=0}^t \prod_{y=0}^z h(y, x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。[証明終]

[V] 有界最小化の例

- $\sqrt{x}$ の整数部分;

$$\text{isqr}(x) = \mu_{y \leq x} [x < (y+1)^2]$$

- $\sqrt{x}$ を 10 進小数展開したときの小数第 n 位の数;

$$\text{dpsqr}(x, n) = \text{rem}(\mu_{y \leq 10^n x} [10^{2n} x < (y+1)^2], 10)$$

- “ x は平方数である” は、

$$x > 1 \text{ かつ } \mu_{y \leq x} [x = y^2] \leq x$$

と同値なので、原始帰納的述語である。

- $x + 1$ 番目の素数 $\text{NP}(x)$;

$$\text{NP}(0) = 2, \text{NP}(1) = 3, \text{NP}(2) = 5, \text{NP}(3) = 7, \dots$$

これは、有界最小化

$$f(x, t) = \mu_{y \leq t} [x < y \text{ かつ } y \text{ は素数}]$$

によって

$$\begin{cases} \text{NP}(0) = 2 \\ \text{NP}(x') = f(\text{NP}(x), \text{NP}(x) ! + 1) \end{cases}$$

と定義できる。さらに、Bertrand's postulate を用いると

$$\begin{cases} \text{NP}(0) = 2 \\ \text{NP}(x') = f(\text{NP}(x), 2\text{NP}(x)) \end{cases}$$

とも定義できることがわかる。

[VI] 最小化

一般に、述語 $A(y, x_1, \dots, x_n)$ に対して

$$g(x_1, \dots, x_n) = \min \{ y \mid A(y, x_1, \dots, x_n) \}$$

によって関数 g が定義できるとき、 g を A に関する**最小化**といい、

$$\mu_y [A(y, x_1, \dots, x_n)]$$

で表す。 A の特性関数を h とすれば、前と同様にして形式的に

$$\mu_y [A(y, x_1, \dots, x_n)] = \sum_{z=0}^{\infty} \prod_{y=0}^z h(y, x_1, \dots, x_n)$$

と書ける。このようにして関数が定義されるためには、

『任意の $x_1, \dots, x_n$ に対して $A(y, x_1, \dots, x_n)$ なる y が存在する』

ことが必要十分である。

原始帰納的述語に関する有界最小化は原始帰納的であるが、**最小化は一般には原始帰納的とは限らないことが知られている。**