5　原始帰納的関数

[I] “図形” としての自然数

(i)　0 は自然数である。

(ii)　n が自然数ならば、n' も自然数である。

(iii)　(i),(ii) によって定められるもののみが自然数である。

n' を n の後者という。通常は $0'$ を 1 と書き、$0''$ を 2 と書き、$\cdots$ と約束するが、これらは略記号であり、“図形” としての自然数はあくまで、$0, 0', 0'', 0''', \cdots$ なる形をしていると考える。

[II] 関数の帰納的定義と “図形” としての計算

- 和の定義:

$$\begin{cases} 0 + y = y \\ x' + y = (x + y)' \end{cases}$$

たとえば、

$$0''' + 0'' = (0'' + 0'')' = (0' + 0'')'' = (0 + 0'')''' = 0'''''$$

は $3 + 2 = 5$ を意味する。

- 積の定義:

$$\begin{cases} 0 \cdot y = 0 \\ x' \cdot y = x \cdot y + y \end{cases}$$

$2 \cdot 3 = 6$ は、

$$\begin{aligned} 0'' \cdot 0''' &= 0' \cdot 0''' + 0''' = (0 \cdot 0''' + 0''') + 0''' = 0''' + 0''' \\ &= (0'' + 0''')' = (0' + 0''')'' = (0 + 0''')''' = 0'''''' \end{aligned}$$

と計算される。

- べきの定義:

$$\begin{cases} y^0 = 1 \\ y^{x'} = y^x \cdot y \end{cases}$$

2^3 の計算は

$$0''^{0'''} = 0''^{0''} \cdot 0'' = (0''^{0'} \cdot 0'') \cdot 0'' = ((0''^{0} \cdot 0'') \cdot 0'') \cdot 0'' = ((0' \cdot 0'') \cdot 0'') \cdot 0''$$

によって、積の計算に帰着される。

[III] **原始帰納的関数**

- **基本関数**
  - 零関数: $N(x) = 0$
  - 後者関数: $S(x) = x'$
  - 射影関数: $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i \quad (i = 1, \cdots, n)$

- **合成**　与えられた n 変数関数 $g_1, \cdots, g_m$ と m 変数関数 h から

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

によって得られる n 変数関数 f を、$g_1, \cdots, g_m$ および h の合成によって定義された関数という。

- **帰納的定義**　関数 g と h が与えられたとき、

$$\begin{cases} f(0, x_1, \cdots, x_n) = g(0, x_1, \cdots, x_n) \\ f(x', x_1, \cdots, x_n) = h(f(x, x_1, \cdots, x_n), x, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

によって定まる関数 f を、g, h から帰納的に定義された関数という。

- **定義**　基本関数から出発して、合成または帰納的定義を有限回ほどこして得られる関数を、**原始帰納的関数**という。

- **恒等関数**　$I(x) = x$ は、１変数の射影関数 $P_1^1(x)$ と等しいので原始帰納的である。また、

$$\begin{cases} I(0) = 0 \\ I(x') = S(I(x)) \end{cases}$$

のように、帰納的定義によっても得られる (正確には

$$\begin{cases} I(0) = N(0) \\ I(x') = h(I(x), x) \qquad \text{ただし、} \quad h(x, y) = S(P_1^2(x, y)) \end{cases}$$

と定義すべき)。

- **定数関数**　固定された自然数 n に対する定数関数: $C_n(x) = n$ は

$$C_n(x) = \underbrace{S(S(\cdots S}_{n}(N(x)) \cdots))$$

のように N, S の合成によって得られるので、原始帰納的である。

[IV] 原始帰納的関数の例

- 和、積、べき;
  たとえば、和 $\mathrm{plus}(x,y)=x+y$ は、$h(x,y,z)=S(P_1^3(x,y,z))$ とおいて
  $$\begin{cases} \mathrm{plus}(0,y)=P_2^2(0,y) \\ \mathrm{plus}(x',y)=h(\mathrm{plus}(x,y),x,y) \end{cases}$$
  のように、帰納的定義によって与えることができる。
- 直前の数;
  $$\begin{cases} \mathrm{prev}(0)=0 \\ \mathrm{prev}(x')=x \end{cases}$$
- 半差、すなわち $x>y$ のとき $x-y$、$x\le y$ のとき 0;
  $$\begin{cases} x \smile 0 = x \\ x \smile y' = \mathrm{prev}(x \smile y) \end{cases}$$
- 差;
  $$|x-y|=(x\smile y)+(y\smile x)$$
- 零判定関数;
  $$\mathrm{sg}(x)=1\smile(1\smile x), \qquad \overline{\mathrm{sg}}(x)=1\smile x$$
  または、帰納的定義で
  $$\begin{cases} \mathrm{sg}(0)=0, \quad \overline{\mathrm{sg}}(0)=1 \\ \mathrm{sg}(x')=1, \quad \overline{\mathrm{sg}}(x')=0 \end{cases}$$
- 剰余、x を y で割ったときの余り;
  $$\begin{cases} \mathrm{rem}(0,y)=0 \\ \mathrm{rem}(x',y)=(\mathrm{rem}(x,y)+1)\cdot\mathrm{sg}(y\smile(\mathrm{rem}(x,y)+1)) \\ \qquad\qquad\qquad +(x+1)\cdot\overline{\mathrm{sg}}(y) \end{cases}$$
  通常 $y=0$ のときは定義されないが、ここでは $\mathrm{rem}(x,0)=x$ とする。
- x を y で割ったときの商;
  $$\begin{cases} \mathrm{quo}(0,y)=0 \\ \mathrm{quo}(x',y)=\mathrm{quo}(x,y)+\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(x+1,y)) \end{cases}$$
- y より小さい x の約数の個数;
  $$\begin{cases} \mathrm{dnum}(x,0)=0 \\ \mathrm{dnum}(x,y')=\mathrm{dnum}(x,y)+\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(x,y)) \end{cases}$$

- 素数の判定;

$$\mathrm{Prime}(x) = \mathrm{sg}(|\mathrm{dnum}(x,x) - 1|)$$

x が素数のとき 0 で、そうでないとき 1 となる。

[V] 総和・総積による定義

- **定理 5-1** $f(x, x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的関数ならば、

$$\mathrm{Sum}_f(x, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{y=0}^{x} f(y, x_1, \cdots, x_n)$$

$$\mathrm{Prod}_f(x, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{y=0}^{x} f(y, x_1, \cdots, x_n)$$

なる関数 Sum_f および Prod_f は原始帰納的関数である。

[証明] Sum_f は帰納的に

$$\begin{cases} \mathrm{Sum}_f(0, x_1, \cdots, x_n) = f(0, x_1, \cdots, x_n) \\ \mathrm{Sum}_f(x', x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{Sum}_f(x, x_1, \cdots, x_n) + f(x', x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

と定義され、Prod_f も帰納的に

$$\begin{cases} \mathrm{Prod}_f(0, x_1, \cdots, x_n) = f(0, x_1, \cdots, x_n) \\ \mathrm{Prod}_f(x', x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{Prod}_f(x, x_1, \cdots, x_n) \cdot f(x', x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

と定義されるので原始帰納的関数である。[証明終]

- 商 $\mathrm{quo}(x, y)$ は $x - y,\ x - 2y,\ x - 3y, \cdots$ が非負となる個数、すなわち、 $x + 1 - y,\ x + 1 - 2y,\ x + 1 - 3y, \cdots$ が正となる個数だから、

$$\mathrm{quo}(x, y) = \sum_{z=1}^{x} \mathrm{sg}((x+1) \smile zy)$$

とも定義できる。

- x を割る最大の p べき指数:

$$\nu(p, x) = \sum_{y=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(x, p^y))$$

- x の素因数の積:

$$\mathrm{spf}(x) = \prod_{p=2}^{x} p^{\mathrm{sg}(\nu(p,x)) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{Prime}(p))}$$