

4 Turing 機械の実例

[I] 数の表現

- 自然数 n に対して、1 を n 個並べたものを $\bar{n}$ で表し、自然数のペア (m, n) を、 $\bar{m} * \bar{n}$ で表す;

$$\bar{n} = \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n$$

$$\bar{m} * \bar{n} = \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_m * \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n$$

同様に、3つ組は $\bar{l} * \bar{m} * \bar{n}$ で表す。4つ以上の場合も同様。

- 手続き Z に対して、時点表示 $a\bar{n}$ または $a\bar{m} * \bar{n}$ 等を初期値とする Z -計算を考える。

$$a\bar{n} = a \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n \rightarrow \cdots$$

- 手続き Z が停止したときの時点表示 (すなわち Z -計算の値) に含まれる 1 の総数を計算結果とし、 $N_Z(n)$ または $N_Z(m, n)$ 等で表す。

[II] 例

- (i) $f(n) = 0$ (定数関数): 手続き Z は 2 つの指令からなる;

手続き: $a\ 1\ \# a, \quad a\ \# R\ a$

動作: $a \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n \rightarrow a\ \# \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{n-1} \rightarrow \# a \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{n-1} \rightarrow \cdots$

$$\rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_{n-1} a\ 1 \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_{n-1} a\ \# \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_{n-1} \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_n a\ 0$$

- (ii) $f(n) = 1$ (定数関数): 手続き Z は 3 つの指令からなる;

手続き: $a\ 1\ \# a, \quad a\ \# R\ a, \quad a\ 0\ 1\ b$

動作: $a \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_n a\ 0$ (上記と同様) $\rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \cdots\ \#}_n b\ 1$

- (iii) $f(n) = n + 1$:

手続き: $a\ 1\ L\ b, \quad a\ 0\ 1\ b, \quad b\ 0\ 1\ b$

動作: $a \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n \rightarrow b\ 0 \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_n \rightarrow b\ 1 \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{n+1}$

$$(iv) f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n > 0 \end{cases} :$$

手続き: $a \ 1 \ R \ b, \quad a \ 0 \ 0 \ b, \quad b \ 1 \ 0 \ c, \quad c \ 0 \ R \ b$

動作: $a \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_n \rightarrow 1 \ b \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_{n-1} \rightarrow 1 \ c \ 0 \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_{n-2} \rightarrow$
 $1 \ 0 \ b \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow 1 \underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n-2} b \ 1 \rightarrow$
 $1 \underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n-2} c \ 0 \rightarrow 1 \underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n-1} b \ 0$

$$(v) f(n) = 2n:$$

手続き:

$\left. \begin{array}{l} a \ 1 \ \# \ a \\ a \ \# \ R \ b \end{array} \right\} \quad (1) \ 1 \text{ を } \# \text{ に書き換える}$
 $\left. \begin{array}{l} b \ 1 \ R \ b \\ b \ 0 \ R \ c \\ c \ 1 \ R \ c \\ c \ 0 \ 1 \ d \end{array} \right\} \quad (2) \text{ 右へ移動し、二つめの } 0 \text{ を } 1 \text{ に書き換える}$
 $\left. \begin{array}{l} d \ 1 \ L \ d \\ d \ 0 \ L \ e \\ e \ 1 \ L \ e \end{array} \right\} \quad \text{左へ移動し、(3) または (4) へ}$
 $\left. \begin{array}{l} e \ \# \ 0 \ f \\ f \ 0 \ R \ b \end{array} \right\} \quad (3) \ \# \text{ に到達したら、} 0 \text{ に書き換え、(2) へもどる}$
 $e \ 0 \ R \ a \quad (4) \ 0 \text{ に到達したら、(1) へもどる}$

[III] 四則演算

(vi) $f(m, n) = m + n$: 和を計算する手続きはきわめて簡単に定義できる;

手続き: なし (または、絶対に実行されない指令、たとえば $a \ \# \ 1 \ a$)

動作: $a \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_m * \underbrace{1 \ 1 \ \cdots \ 1}_n \quad (\text{変化しない})$

$$(vii) f(m, n) = \begin{cases} 0, & m \leq n, \\ m - n, & m > n \end{cases} :$$

手続き:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} a \ 1 \ R \ a \\ a \ * \ R \ a \\ a \ 0 \ L \ b \end{array} \right\} \quad (1) \text{ 右端へ移動する} \\
 b \ 1 \ 0 \ b \quad \text{右端に 1 があれば 0 に書き換え、なければ停止する} \\
 \left. \begin{array}{l} b \ 0 \ L \ c \\ c \ 1 \ L \ c \\ c \ * \ L \ d \\ d \ * \ L \ d \end{array} \right\} \quad * \text{の左へ移動する} \\
 d \ 1 \ * \ a \quad * \text{の左が 1 ならば * に書き換え、(1) にもどる} \\
 \left. \begin{array}{l} d \ 0 \ R \ e \\ e \ * \ R \ e \\ e \ 1 \ * \ e \end{array} \right\} \quad * \text{の左が 0 ならば残った 1 をすべて * に書き換える}
 \end{array}$$

(viii) $f(m, n) = mn$:

手続き:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} a \ * \ R \ i \\ a \ 1 \ 0 \ a \\ a \ 0 \ R \ b \end{array} \right\} \quad (1) \text{ 左端に 1 があればそれを消し (2) へ、} \\
 \hspace{10em} \text{なければ (5) へ} \\
 \left. \begin{array}{l} b \ 1 \ R \ b \\ b \ * \ R \ c \end{array} \right\} \quad (2) \ * \text{の右まで移動する} \\
 \left. \begin{array}{l} c \ 1 \ \# \ c \\ c \ \# \ R \ d \end{array} \right\} \quad (3) \ 1 \text{ を } \# \text{ に書き換える} \\
 \left. \begin{array}{l} d \ 1 \ R \ d \\ d \ 0 \ R \ e \\ e \ 1 \ R \ e \\ e \ 0 \ 1 \ f \end{array} \right\} \quad \text{右へ移動し、二つめの 0 を 1 に書き換える} \\
 \left. \begin{array}{l} f \ 1 \ L \ f \\ f \ 0 \ L \ f \\ f \ \# \ 1 \ g \end{array} \right\} \quad \# \text{ の位置まで左へ移動し、} \# \text{ を 1 に書き換える} \\
 \left. \begin{array}{l} g \ 1 \ R \ c \\ c \ 0 \ L \ h \end{array} \right\} \quad \text{右へ一つ移動し、1 があれば (3) へ、なければ (4) へ} \\
 \left. \begin{array}{l} h \ 1 \ L \ h \\ h \ * \ L \ h \\ h \ 0 \ R \ a \end{array} \right\} \quad (4) \text{ 左端に移動し、(1) へもどる} \\
 \left. \begin{array}{l} i \ 1 \ * \ i \\ i \ * \ R \ i \end{array} \right\} \quad (5) \text{ 第二引数を表す 1 をすべて * に書き換える}
 \end{array}$$

(ix) $f(m, n) = \left[\frac{m}{n} \right] \left(= \frac{m}{n} \text{ の整数部分} \right)$:

手続き:

$\left. \begin{array}{l} a \ 1 \ 0 \ a \\ a \ * \ R \ b \end{array} \right\}$	*の右まで移動する
$\left. \begin{array}{l} b \ 1 \ # \ b \\ b \ # \ L \ c \\ b \ 0 \ R \ g \end{array} \right\}$	(1) 1 ならば # に書き換える、0 ならば (2) へ
$\left. \begin{array}{l} c \ 1 \ L \ c \\ c \ * \ L \ d \\ d \ * \ L \ d \end{array} \right\}$	*の左まで移動する
$\left. \begin{array}{l} d \ 1 \ * \ e \\ d \ 0 \ R \ i \end{array} \right\}$	1 ならば 0 に書き換える、0 ならば (3) へ
$\left. \begin{array}{l} e \ * \ R \ e \\ e \ 1 \ R \ e \\ e \ # \ 1 \ f \\ f \ 1 \ R \ b \end{array} \right\}$	# の位置まで右へ移動し、# を 1 に書き換え、 右へ一つ移動し、(1) へもどる
$\left. \begin{array}{l} g \ 1 \ R \ g \\ g \ 0 \ 1 \ h \end{array} \right\}$	(2) 0 が現れるまで右に移動し、0 を 1 に書き換える
$\left. \begin{array}{l} h \ 1 \ L \ h \\ h \ 0 \ L \ h \\ h \ * \ R \ b \end{array} \right\}$	*の右まで移動し、(1) へもどる
$\left. \begin{array}{l} i \ * \ R \ i \\ i \ 1 \ * \ i \\ i \ # \ * \ i \end{array} \right\}$	(3) 第二引数を表す 1 と # をすべて * に書き換える

[IV] 機械化可能性

- **定義** $f(x_1, \dots, x_n)$ を自然数の上で定義された自然数値関数とする。このとき、手続き Z で、任意の $x_1, \dots, x_n$ に対して、

$$N_Z(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

なるものが存在するとき、 f は機械化可能であるという。

- **定理 4-1** 自然数上の定数関数、和、積は、それぞれ機械化可能である。
- **定理 4-2** 機械化可能な自然数値関数の合成は機械化可能である。