1　序論

[I] 計算とは？

- ある概念 (事柄、事象、現象) から、別の概念を得る (導く、推測する) ためのステップ。
  (a) もとの概念をある言葉によって表現する。
  (b) 「表現されたもの」を操作・変形する。
  (c) 「操作・変形されたもの」から、新たな概念を読み取る。
- 「表現されたもの」「操作・変形されたもの」は、記号(の列) によって書かれる;

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{旧概念}} & \longrightarrow & \boxed{\text{記号列}} & & \\
 & & \downarrow & \text{操作・変形} & = \ \underline{\text{計算}} \\
\boxed{\text{新概念}} & \longleftarrow & \boxed{\text{記号列}} & &
\end{array}$$

- 実際には、現実のものから概念を抽出したりその逆の操作が行なわれる;

$$\begin{array}{ccccc}
 & \to \text{抽象} \to & & \to \text{記号化} \to & \\
\boxed{\text{現実}} & & \boxed{\text{概念}} & & \boxed{\text{記号列}} \\
 & \leftarrow \text{具象} \leftarrow & & \leftarrow \text{意味} \leftarrow &
\end{array}$$

例;

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{現実の長方形}} & \longrightarrow & \boxed{2\,\text{辺の長さ}} & \longrightarrow & \boxed{a \text{ cm}, b \text{ cm}} \\
 & & & & \downarrow \ \text{掛算} \\
\boxed{\text{長方形の広さ}} & \longleftarrow & \boxed{\text{面積}} & \longleftarrow & \boxed{ab\,\mathrm{cm}^2}
\end{array}$$

[II] 数字 (記数法)・記号の歴史

- バビロニアのくさび形文字

PLIMPTON 322 — 古バビロニアの粘土版 (B.C.1900 – 1600)

1 〜 9 $\cdots$

10 〜 90 $\cdots$

100 〜 900 $\cdots$

60 進法 —— 自然数を

$$a_0 + a_1 \times 60 + a_2 \times 60^2 + a_3 \times 60^3 + \cdots$$

と表す、ただし $0 \le a_0, a_1, a_2, \cdots < 60$ とする。

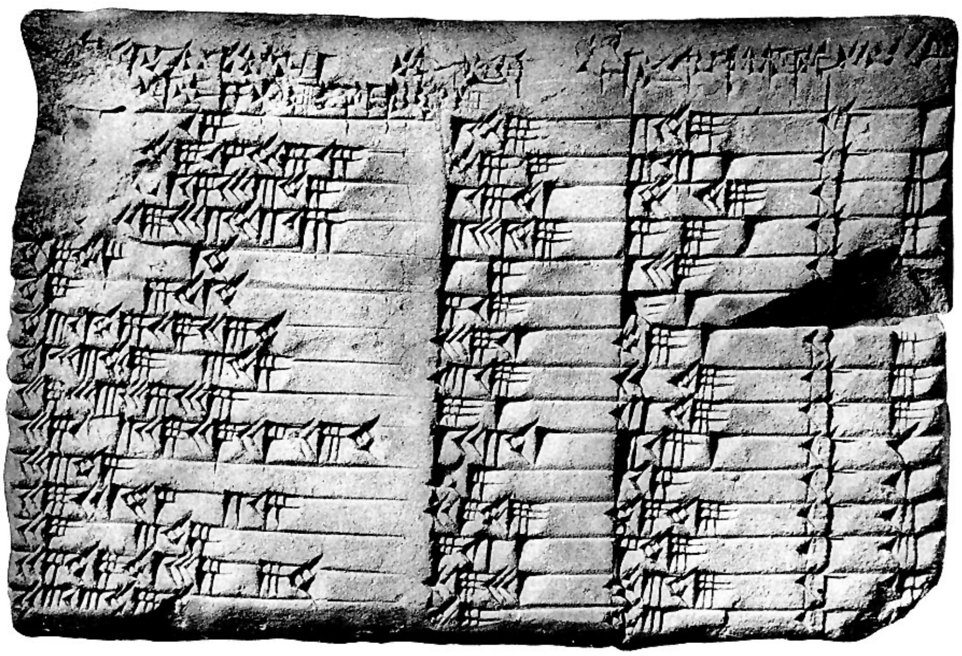
$= 1 \times 60 + 3 = 63$

1, 3

$= 33 \times 60 + 24 = 2004$

33, 24

バビロニアの粘土板（イラク南部で出土）
Plimpton322 (B.C.1800 頃)



- ローマ数字・漢数字
  - ローマ数字

基本数字	I	V	X	L	C	D	M
	1	5	10	50	100	500	1000

    の組合せで 1 〜 3999 までの数を表現する。

1 〜 9	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
10 〜 90	X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
100 〜 900	C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM
1000 〜 3000	M	MM	MMM						

    一般に十進展開して大きい桁から順に書き下す。

    23 XXIII, 72 LXXII, 348 CCCXLVIII,
    2004 MMIV, 1999 MCMXCIX

  - 漢数字

一つの桁の数字	一	二	三	四	五	六	七	八	九
10, 100, 1000 の桁	十	百	千						
10^4 倍ずつの桁	万	億	兆	京	垓	杼	⋯		
10^{-1} 倍ずつの桁	割	分	厘	毛	糸	⋯			

  - ローマ数字も漢数字も、大きな文字を表すには多くの文字を必要とした。
  - ゼロを表す記号は無く、また筆算には向かない。

- 位取り原則の導入
  - 算用数字 — インド ($\leftrightarrow$ 中国) $\underset{8c\text{ 後半}}{\longrightarrow}$ アラビア $\underset{12c\text{ 後半}}{\longrightarrow}$ ヨーロッパ
  - 筆算が容易。
  - ゼロの四則の認識 (7c 頃)
  - 有限個の記号の列でどんな大きな数でも表すことが可能。
  - 小数への拡張によって小さな数の表現が可能。
- 計算記号・代数記号の導入
  - 幾何学との関係
    - 未知数そのもの、未知数の平方、未知数の立方をそれぞれ異なることばで表現
    - 同一次元の原則 (ヴィエト 1540 – 1603)
    - たとえば、式 $X^3 + 3B^2X = 2A^3$ は次のように表現される;

      “X cubus + B plano 3 in X, aquari A solido 2”
  - デカルトの解析幾何学

        * 数直線を基礎とした幾何学
- 集合による数の体系の構築
    - 幾何学的イメージからの脱却
    - 「記号列」としての「式」

[III] ライプニッツ (1646 – 1716, ドイツ)

- 1670 年代に四則計算器を発案・作成。
- 「計算」そのものを思考対象とする。
- 論理的推論をも「計算」と考え、推論機械を構想。
- すぐれた記号を発案。