

## 4 Turing 機械の実例

### [I] 数の表現

- 自然数  $n$  に対して、1 を  $n$  個並べたものを  $\bar{n}$  で表し、自然数のペア  $(m, n)$  を、 $\bar{m} * \bar{n}$  で表す;

$$\bar{n} = \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n$$

$$\bar{m} * \bar{n} = \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_m * \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n$$

同様に、3 つ組は  $\bar{l} * \bar{m} * \bar{n}$  で表す。4 つ以上の場合も同様。

- 機械  $Z$  に対して、時点表示  $a\bar{n}$  または  $a\bar{m} * \bar{n}$  等を初期値とする  $Z$ -計算を考える。

$$a\bar{n} = a \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n \rightarrow \dots$$

- 機械  $Z$  が停止したときの時点表示 (すなわち  $Z$ -計算の値) に含まれる 1 の総数を計算結果とし、 $N_Z(n)$  または  $N_Z(m, n)$  等で表す。

### [II] 例

- (i)  $f(n) = 0$  (定数関数):  $Z$  は 2 つの指令からなる;

指令:  $a\ 1\ \# a, \quad a\ \# R a$

動作:  $a \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n \rightarrow a\ \# \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{n-1} \rightarrow \# a \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{n-1} \rightarrow \dots$

$$\rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \dots\ \#}_{n-1} a\ 1 \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \dots\ \#}_{n-1} a\ \# \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \dots\ \#}_{n-1} \# a\ 0$$

- (ii)  $f(n) = 1$  (定数関数):  $Z$  は 3 つの指令からなる;

指令:  $a\ 1\ \# a, \quad a\ \# R a, \quad a\ 0\ 1\ b$

動作:  $a \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n \rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \dots\ \#}_n a\ 0$  (上記と同様)  $\rightarrow \underbrace{\#\ \#\ \dots\ \#}_n b\ 1$

- (iii)  $f(n) = n + 1$ :

指令:  $a\ 1\ L b, \quad a\ 0\ 1\ b, \quad b\ 0\ 1\ b$

動作:  $a \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n \rightarrow b\ 0 \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_n \rightarrow b \overbrace{1\ 1\ 1\ \dots\ 1}^{n+1}$

(iv)  $f(m, n) = m + n$ : 和を計算する機械はきわめて簡単に定義できる;

指令: なし

動作:  $a \underbrace{1 1 \dots 1}_m * \underbrace{1 1 \dots 1}_n$  (変化しない)

(v)  $f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n > 0 \end{cases}$ :

指令:  $a 1 R b, a 0 0 b, b 1 0 c, c 0 R b$

動作:  $a \underbrace{1 1 \dots 1}_n \rightarrow 1 b \underbrace{1 1 \dots 1}_{n-1} \rightarrow 1 c 0 \underbrace{1 1 \dots 1}_{n-2} \rightarrow$   
 $1 0 b \underbrace{1 1 \dots 1}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow 1 \underbrace{0 0 \dots 0}_{n-2} b 1 \rightarrow$   
 $1 \underbrace{0 0 \dots 0}_{n-2} c 0 \rightarrow 1 \underbrace{0 0 \dots 0}_{n-1} b 0$

(vi)  $f(m, n) = \begin{cases} 0, & m > n, \\ n - m, & m \leq n \end{cases}$ :

指令:

$a 1 0 a$	}	左端の 1 を一つ消し右へ移動する
$a 0 R b$		
$b 1 R b$		
$b * R b$		
$b 0 L c$		
$c 1 0 c$	}	右端に 1 があれば一つ消し、左へ一つ移動する
$c 0 L d$		
$c * L d$		
$d 1 L d$	}	左端まで移動する
$d * L d$		
$d 0 R a$		

(vii)  $f(n) = 2n$ :

指令:

$a 1 \# a$	}	(1) 1 を # に書き換える
$a \# R b$		
$b 1 R b$	}	(2) 右へ移動し、二つめの 0 を 1 に書き換える
$b 0 R c$		
$c 1 R c$		
$c 0 1 d$		

$$\begin{array}{l}
 d 1 L d \\
 d 0 L e \\
 e 1 L e
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} d 1 L d \\ d 0 L e \\ e 1 L e \end{array}} \right\} \text{左へ移動し、(3) または (4) へ}$$

$$\begin{array}{l}
 e \# 0 f \\
 f 0 R b
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} e \# 0 f \\ f 0 R b \end{array}} \right\} \text{(3) \# に到達したら、0 に書き換え、(2) へもどる}$$

$$e 0 R a \quad \text{(4) 0 に到達したら、(1) へもどる}$$

(viii)  $f(m, n) = mn$ :

指令:

$$\begin{array}{l}
 a * R i \\
 a 1 0 a \\
 a 0 R b
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a * R i \\ a 1 0 a \\ a 0 R b \end{array}} \right\} \text{(1) 左端に 1 があればそれを消し (2) へ、} \\
 \text{なければ (5) へ}$$

$$\begin{array}{l}
 b 1 R b \\
 b * R c
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} b 1 R b \\ b * R c \end{array}} \right\} \text{(2) * の右まで移動する}$$

$$\begin{array}{l}
 c 1 \# c \\
 c \# R d
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} c 1 \# c \\ c \# R d \end{array}} \right\} \text{(3) 1 を \# に書き換える}$$

$$\begin{array}{l}
 d 1 R d \\
 d 0 R e \\
 e 1 R e \\
 e 0 1 f
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} d 1 R d \\ d 0 R e \\ e 1 R e \\ e 0 1 f \end{array}} \right\} \text{右へ移動し、二つめの 0 を 1 に書き換える}$$

$$\begin{array}{l}
 f 1 L f \\
 f 0 L f \\
 f \# 1 g
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} f 1 L f \\ f 0 L f \\ f \# 1 g \end{array}} \right\} \text{\# の位置まで左へ移動し、\# を 1 に書き換える}$$

$$\begin{array}{l}
 g 1 R c \\
 c 0 L h
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} g 1 R c \\ c 0 L h \end{array}} \right\} \text{右へ一つ移動し、1 があれば (3) へ、なければ (4) へ}$$

$$\begin{array}{l}
 h 1 L h \\
 h * L h \\
 h 0 R a
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} h 1 L h \\ h * L h \\ h 0 R a \end{array}} \right\} \text{(4) 左端に移動し、(1) へもどる}$$

$$\begin{array}{l}
 i 1 \# i \\
 i \# R i
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} i 1 \# i \\ i \# R i \end{array}} \right\} \text{(5) 第二引数 } n \text{ に相当する 1 をすべて \# に書き換える}$$

## [III] 機械化可能性

- 定義  $f(x_1, \dots, x_n)$  を自然数の上で定義された自然数値関数とする。このとき、機械  $Z$  で、任意の  $x_1, \dots, x_n$  に対して、

$$N_Z(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

なるものが存在するとき、 $f$  は機械化可能であるという。

- 定理 4-1 自然数上の定数関数、和、積は、それぞれ機械化可能である。
- 定理 4-2 機械化可能な自然数値関数の合成は機械化可能である。