

代数入門 試験問題 July 13, 2026 (中野 伸)

注意: 数値等を求める問題についても, 結果に至る考え方を簡潔に書くこと

[1] $a = 2771, b = 7661$ とし, これらの最大公約数を g とする.

- (1) g を求めよ.
- (2) $ax + by = g$ をみたす整数 x, y を一組求めよ.
- (3) $ax + by = g$ をみたす整数 x, y の組のうち, x が最小の自然数となる組を求めよ.

[2] 合同式に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 合同式 $45x + 7 \equiv 0 \pmod{43}$ をみたす最小の自然数 x を求めよ.
- (2) 次のそれぞれの連立合同式について, 整数解が存在するならば最小の自然数解を求め, 存在しないならばその根拠を述べよ.

$$\text{(あ)} \quad \begin{cases} 45x + 7 \equiv 0 & (\text{mod } 43) \\ x \equiv 13 & (\text{mod } 15) \end{cases} \quad \text{(い)} \quad \begin{cases} x + 2 \equiv 0 & (\text{mod } 15) \\ x + 16 \equiv 0 & (\text{mod } 21) \end{cases}$$

[3] $m = 23 \times 29 = 667$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) m を法として 138 が可逆元かどうかを判定せよ.
- (2) 7^{1235} を m で割った余りを求めよ.
- (3) $p \equiv 27 \pmod{m}$ をみたす素数 p について, 平方剰余記号 $\left(\frac{-m}{p}\right)$ を計算せよ.

[4] 二つの素数 p, q が関係式 $p = 2q + 1$ をみたすとする. $1 < c < p - 1$ をみたす整数 c に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) 法 p に関する c の位数は q 以上であることを示せ.
- (2) c が p を法として平方非剰余であれば, c は法 p に関する原始根であることを示せ (ヒント: オイラーの規準).
- (3) $(p, q) = (47, 23), (2027, 1013)$ はそれぞれ $p = 2q + 1$ をみたす素数のペアである. 法 $p = 47, 2027$ に関する原始根をひとつずつ与えよ.