

代数入門 試験問題 Jan. 29, 2015 (中野 伸)

- [1] 連立合同式
$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{12151} \\ x \equiv 1 \pmod{9637} \end{cases}$$
 をみたく整数 x は存在しないことを証明せよ .

- [2] 自然な全単射

$$\mathbb{Z}/495\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$$

において, $(\bar{3}, \bar{2}, \bar{-5})$ の逆像を求めよ .

- [3] 素数 p が $p \equiv 1 \pmod{4}$ をみたし, g が法 p に関する原始根であるとする . このとき, $-g$ も法 p に関する原始根であることを示せ .

- [4] 以下の合同式について, それぞれの法に関する整数解の個数を求めよ .

(1) $x^2 + 7x + 7 \equiv 0 \pmod{257}$

(2) $x^3 + 68x^2 \equiv 2 \pmod{67}$

ここで, 257, 67 はどちらも素数であることを証明せずに使ってよい .

- [5] m を 3 以上の奇数とし, $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ が整数解を持つとする . このとき, $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m^2}$ も整数解を持つことを証明せよ .