

代数入門 試験問題 Jan. 30, 2014 (中野 伸)

[1] 以下の命題を証明せよ .

(1)  $g$  を奇素数  $p$  を法とする原始根とし ,  $n$  を  $p - 1$  の倍数でない自然数とすると ,  $g^n \not\equiv 1 \pmod{p}$  である .

(Hint:  $n$  を  $p - 1$  で割った余りを  $r$  とすると.....)

(2)  $4n - 1$  ( $n$  は自然数) の形の素数が無限個存在する .

(Hint: そういう素数  $p_1, \dots, p_r$  から  $4p_1p_2 \cdots p_r - 1$  を作ると.....)

(3)  $p, q$  を異なる素数とすると ,  $a, a - 1$  のどちらも  $pq$  を法とする零因子となる整数  $a$  が存在する .

(Hint:  $x \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $x \not\equiv 0 \pmod{q}$  をみたく  $x$  は.....)

[2] 以下の問いに答えよ .

(1)  $29x \equiv 6 \pmod{200}$  をみたく整数  $x$  をひとつ求めよ .

(2)  $29x \equiv 6 \pmod{200}$ ,  $x \equiv -2 \pmod{63}$  を同時にみたく最小の自然数  $x$  を求めよ .

[3]  $x$  を未知数とする合同式  $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$  について以下の問いに答えよ .

(1)  $m$  が素数のとき , 解は  $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$  のみであることを示せ .

(2)  $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$  以外の解をもつ  $m > 50$  を例示せよ .

[4] 以下の問いに答えよ .

(1) 21 は法 53 に関して平方剰余かどうか判定せよ .

(2) 素数  $p$  が  $p \equiv -1 \pmod{5}$  をみたくとき ,  $x^2 + 6x - 11 \equiv 0 \pmod{p}$  が整数解をもつかどうか判定せよ .