代数入門 試験問題 Jan. 31, 2013 (中野 伸)

[1] 自然数 m, n, d は

$$\gcd(m,n)=1, \quad md=5293, \quad nd=5427$$

をみたすとする． このとき，連立合同式

$$\begin{cases} x \equiv -3 \pmod{m} \\ x \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}$$

を解け.

[2] 法 15 に関する既約剰余類群 $(\boldsymbol{Z}/15\boldsymbol{Z})^\times$ について以下の問いに答えよ.

(1) 各元の位数を求めよ.

(2) 原始根が存在するかどうか答えよ.

(3) $f : (\boldsymbol{Z}/15\boldsymbol{Z})^\times \longrightarrow (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^\times \times (\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z})^\times$ を自然な写像とするとき，$f(\overline{x}) = (\overline{20}, \overline{13})$ をみたす $\overline{x}$ を求めよ.

[3] 以下の問に答えよ.

(1) 307 が素数かどうか判定せよ.

(2) 合同式 $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{307}$ が整数解をもつかどうか判定せよ.

(3) 合同式 $x^{2451} \equiv 1 \pmod{307}$ をみたす整数 x $(0 \leq x < 307)$ の個数を求めよ（x の値を求める必要はない）.

[4] 以下の命題を証明せよ.

(1) 任意の奇素数 p に対して，合同式 $(x^2+1)(x^2-2)(x^2+2) \equiv 0 \pmod{p}$ は整数解をもつ.

(2) 素数 p が $p \equiv 5 \pmod{7}$ をみたすならば，p を法として -7 は平方非剰余である.