

代数入門 中間試験問題 Nov. 17, 2011 (中野 伸)

- [1]  $a = 11979$ ,  $b = 11451$  について次の問に答えよ .
- (1) ユークリッドの互除法を用いて  $a, b$  の最大公約数を求めよ .
  - (2)  $a$  を素因数分解せよ .
  - (3)  $\varphi(a)$  を素因数分解せよ . ただし,  $\varphi$  はオイラー関数である .
  - (4) 法 13 に関する  $b$  の逆元を求めよ .
- [2] 以下の各方程式について, 整数解  $(x, y)$  があればすべて求め, なければその理由を述べよ .
- (1)  $49x + 63y = 21$
  - (2)  $207x + 459y = 12$
- [3] 整数  $m > 1$  が素数でないならば,  $2^m - 1$  も素数でないことを証明せよ .  
(因数分解の公式  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$  を用いてよい.)
- [4] 自然数  $m, n$  と  $m$  の倍数  $a$  に対して
- $$(1 + a)^n \equiv 1 + na \pmod{m^2}$$
- が成り立つことを示せ .
- [5] 整数  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = c^2$  をみたすとき, 以下を証明せよ .
- (1)  $ab \equiv 0 \pmod{3}$  .
  - (2)  $abc \equiv 0 \pmod{5}$  .