

第5章 整数の合同

5.1 合同式

定義 5.1 $a, b, m \in \mathbf{Z}$ に対して, $a - b \in m\mathbf{Z}$ (すなわち $m \mid (a - b)$) であるとき,

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と書き, a は m を法として b と合同であるという. そうでないときは, $a \not\equiv b \pmod{m}$ と書く. このような式を一般に**合同式**といい, m をその合同式の**法**という.

まず, $m \neq 0$ のとき, 整数 a を m で割った余りを r とすると, $a \equiv r \pmod{m}$ が成り立つことに注意しよう. 実際, 商を q とすれば

$$a = qm + r, \quad 0 \leq r < |m|$$

より $a - r = qm$ は m の倍数である. このことを使えば, $m \neq 0$ のとき

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a, b \text{ それぞれを } m \text{ で割った余りは等しい}$$

と書き換えることができる. とくに,

$$a \equiv 0 \pmod{m} \iff m \mid a.$$

次に, “極端” な場合, つまり $m = 0, 1$ のときを考える.

- $m = 1$ のとき, どんな $a, b \in \mathbf{Z}$ に対しても $a \equiv b \pmod{1}$ である.
- $m = 0$ のとき, 「 $a \equiv b \pmod{0} \iff a - b \in 0\mathbf{Z} \iff a - b = 0 \iff a = b$ 」.

これらは例外的に扱われることが多い. また, $(-m)\mathbf{Z} = m\mathbf{Z}$ より

- $a \equiv b \pmod{(-m)} \iff a \equiv b \pmod{m}$.

したがって, ふつう m としては 2 以上の自然数を想定すればよい.

$m = 2$ ならば, 任意の整数 a について,

$$a \equiv 0 \pmod{2}, \quad a \equiv 1 \pmod{2}$$

のどちらか一方が成り立ち, それぞれ a が偶数, 奇数であることを表している.

また、整数 $p > 1$ が素数であることは

$$1 < d < p \text{ である任意の } d \in \mathbf{Z} \text{ に対して } p \not\equiv 0 \pmod{d}$$

によって定義され、さらに命題 4.2 は、 $p > 1$ が素数であるための必要十分条件が

$$ab \equiv 0 \pmod{p} \text{ ならば, } a \equiv 0 \pmod{p} \text{ または } b \equiv 0 \pmod{p}$$

であることを主張している。このように、前出の定義や定理、証明などを合同式を用いて書き換えることは良い学習になる。

さて、合同式の最も基本的な性質は、

- $a \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$,
- $a \equiv b, b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$

であるが、どれも定義から直ちにわかってしまう(はずである(と思う(と信じたい))). これらは、合同式で表される関係が“同値関係”であることを示している(Wikipedia で調べてみ……).

次に、和、差、積(足し算、引き算、掛け算)と合同式の関係についての性質をまとめておく(商、つまり割り算については次節で扱う).

命題 5.2 $a, b, c, d, m \in \mathbf{Z}$ が $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ をみたすならば、

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}, \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

がそれぞれ成り立つ。

証明 ええっと、まず仮定から $a = b + mx, c = d + my$ ($x, y \in \mathbf{Z}$) と書けるから、これらを足したり引いたり掛けたりという方針で…、あとは任せた! \square

次の命題は、どんな場合に法が変化するかを示している。この証明もキミならできる。

命題 5.3 $a, b, l, m, n \in \mathbf{Z}$ に対して次の (1), (2) が成り立つ。

- (1) $m|n$ のとき、 $a \equiv b \pmod{n}$ ならば $a \equiv b \pmod{m}$.
- (2) $l \neq 0$ のとき、 $a \equiv b \pmod{m} \iff al \equiv bl \pmod{ml}$.

(1) の逆は成り立たないことに注意せよ。たとえば、 $3|9$ だけど、 $7 \equiv 1 \pmod{3}$ かつ $7 \not\equiv 1 \pmod{9}$ である。また、(2) と

$$\text{(誤)} \quad l \neq 0 \text{ のとき, } a \equiv b \pmod{m} \iff al \equiv bl \pmod{m}$$

との違いに注意せよ。確かに“ \implies ”は正しいのだが、逆は一般に正しくない。たとえば、 $45 \equiv 15 \pmod{10}$ だが、両辺を 5 で割って $9 \equiv 3 \pmod{10}$ とはできない。一方、両辺を 3 で割れば、 $15 \equiv 5 \pmod{10}$ という正しい合同式を得る。このように、割る数によっては正しい合同式が導かれることもある。どのような数で割ることができるかを、次節で詳しく述べる。

5.2 法に関する逆元

前節の命題 5.2 で見たように合同式と加減乗算の関係はカンタンであったが、割り算については状況が少し複雑である。

定義 5.4 $a, m \in \mathbf{Z}$ に対して、 $ax \equiv 1 \pmod{m}$ をみたす $x \in \mathbf{Z}$ が存在するとき、 a は法 m に関して可逆であるといい、 x を法 m に関する a の逆元という。

逆元はいつも存在するわけではないが、もし存在するならば m を法として一意的に定まる。“ m を法として一意的” とは、 x と x' がともに a の法 m に関する逆元ならば、 $x \equiv x' \pmod{m}$ が成り立つことを意味する。実際、 $ax \equiv ax' \equiv 1 \pmod{m}$ から

$$x \equiv x \cdot 1 \equiv x(ax') \equiv (ax)x' \equiv 1 \cdot x' \equiv x' \pmod{m}$$

が得られる。

例 5.5 (1) $7 \cdot 2 = 14 \equiv 1 \pmod{13}$ より、7 は 13 を法として可逆であり、逆元として 2 がとれる。一方、 $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$ なので、8 は法 11 に関する 7 の逆元である。(2) 14 未満のすべての自然数 x に対して、 $7x \equiv 0$ または $7 \pmod{14}$ であることを確かめよ。このことから、7 は法 14 に関して可逆ではないことがわかる。

整数 a, b の最大公約数が 1 のとき、 a, b は互いに素であるという。次の命題は、法と互いに素な整数による割り算が可能であることを示している。

命題 5.6 互いに素な整数 a, m について次が成り立つ。

- (1) a は法 m に関して可逆である。
- (2) $b, c \in \mathbf{Z}$ が $ab \equiv ac \pmod{m}$ をみたすならば、 $b \equiv c \pmod{m}$ が成り立つ。

証明 (1) $\gcd(a, m) = 1$ より $ax + my = 1$ をみたす $x, y \in \mathbf{Z}$ がとれるが、これより $ax \equiv 1 \pmod{m}$ であるから a は可逆である。

(2) $ab \equiv ac \pmod{m}$ の両辺に、 a の法 m に関する逆元 x を掛ければよい。□

さて、 a が法 m に関して可逆ならば、逆元 x を用いて $ax = 1 + my$ ($y \in \mathbf{Z}$) と書けるが、このことは定理 3.3 より $\gcd(a, m) = 1$ を意味する。上の命題とあわせれば、 a が法 m に関して可逆であるためには、 a, m が互いに素であることが必要十分であることがわかる。式で書けば、

$$\gcd(a, m) = 1 \iff ax \equiv 1 \pmod{m} \text{ をみたす } x \in \mathbf{Z} \text{ が存在する.}$$

とくに、 p が素数のときは、 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ である任意の整数 a に対して、法 p に関する逆元が存在する。

一般に、 $\gcd(a, m) = 1$ のとき、 ax に $x = 1, 2, \dots$ を順々に代入していった m で割った余りが 1 になるものを探すことで、 a の法 m に関する逆元のひとつが求まる。実際に、

計算苦手な私でも $m < 20$ くらいならばこの方法は実用的である（若い皆さんなら計算力もあるから $m < 100$ くらいまで大丈夫？）。しかし、大きな m に対しては効率が悪い。命題 5.6 の証明をみると、 $ax + my = 1$ ($x, y \in \mathbf{Z}$) のとき、 x が a の法 m に関する逆元になっているので、ユークリッドの互除法を用いて x, y を求めれば効率よく計算できる。

例 5.7 (1) 法 2021 に関する 1964 の逆元を求めてみよう。そのために、 $1964x$ に $x = 2, 3, \dots$ を順に代入して 2021 で割り算して余りを求めていくと、いつまで経っても余り 1 が現れない。そこで、2021, 1964 に対してユークリッドの互除法を適用すると、

$$2021 = 1 \cdot 1964 + 57, \quad 1964 = 34 \cdot 57 + 26, \quad 57 = 2 \cdot 26 + 5, \quad 26 = 5 \cdot 5 + 1$$

であり、これらから（例 2.7 のように）

$$-379 \cdot 2021 + 390 \cdot 1964 = 1$$

と計算され（ホントかな？）、法 2021 に関する 1964 の逆元として 390 が求まる。

(2) 一方、法 3437 に関する 1964 の逆元を求めようとして、ユークリッドの互除法を適用すると、最大公約数は 491 となって互いに素ではないから逆元は存在せず、なんだかなあ〜という気分になるので、逆元を求めるときは注意が必要である。

定義 5.8 $a, m \in \mathbf{Z}$ (ただし $m \geq 2$) とする。 $az \equiv 0 \pmod{m}$ かつ $z \not\equiv 0 \pmod{m}$ をみたす $z \in \mathbf{Z}$ が存在するとき、 a は法 m に関する零因子であるという。

たとえば、 $4 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$, $4 \not\equiv 0 \pmod{6}$, $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$ なので、4 と 3 はどちらも法 6 に関する零因子である。なお、どんな法 $m \geq 2$ に対しても、0 は法 m に関する零因子であることに注意せよ（理由を考えてごらん）。

定理 5.9 $a, m \in \mathbf{Z}$ ($m \geq 2$) に対して次は同値である。

- (i) a, m は互いに素である。
- (ii) a は法 m に関して可逆である。
- (iii) a は法 m に関する零因子ではない。

証明 (i) \Rightarrow (ii): すでに命題 5.6 で示されている。

(ii) \Rightarrow (iii): 整数 x を法 m に関する a の逆元とする。いま、 a が零因子であるとするとき、 $az \equiv 0, z \not\equiv 0 \pmod{m}$ をみたす整数 z がとれるが、

$$z = 1 \cdot z \equiv (ax)z = x(az) \equiv x \cdot 0 = 0 \pmod{m}$$

となって矛盾する。よって a は零因子ではない。

(iii) \Rightarrow (i): $d = \gcd(a, m)$ とおき、 $a = a'd, m = m'd$ のように整数 a', m' をとれば、

$$am' = (a'd)m' = a'(m'd) = a'm \equiv 0 \pmod{m}$$

が成り立つが、仮定より a は法 m に関する零因子ではないから、 $m' \equiv 0 \pmod{m}$ 。そこで $m' = mc$ ($c \in \mathbf{Z}$) とかけば、 $m = m'd = mcd$ 、よって $cd = 1$ となるから $d = 1$ 。□