第11章　メビウスの反転公式

11.1　メビウス関数

本章では，整数に関する組合せ論的な性質のうち，最も基本的な「メビウスの反転公式」についてその概略を解説する．

定義 11.1 自然数 n に対して，

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ (-1)^r & (n \text{ が } r \text{ 個の異なる素数の積のとき}) \\ 0 & (n \text{ が素数の } 2 \text{ 乗で割り切れるとき}) \end{cases}$$

とする． また，このようにして定まる自然数上の関数 μ を**メビウス関数**という．（第 9 章最後で定義した μ（それは実際にはカーマイケル関数 λ のこと）とは違うので注意せよ．）

補題 11.2 互いに素な自然数 m, n に対して，$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ が成り立つ．

証明　m, n ともに相異なる素数の積のときのみ証明する（他の場合に成り立つことは，ちょっと考えればすぐわかる）． m, n を素因数分解して，$m = p_1 \cdots p_r$, $n = q_1 \cdots q_s$，ただし $p_1, \ldots, p_r$ および $q_1, \ldots q_s$ はそれぞれ相異なる素数とする． このとき，$\mu(m) = (-1)^r$, $\mu(n) = (-1)^s$ であるが，m, n が互いに素なので $p_i \neq q_j \, (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$. よって，$\mu(mn) = (-1)^{r+s} = \mu(m)\mu(n)$ を得る． □

命題 11.3 $n > 1$ ならば，$\displaystyle\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$. ここで，和は n の正の約数 d 全体をわたる．

証明　n のひとつの素因子 p をとり，$n = p^e m \ (e > 0, p \nmid m)$ と表す． このとき，n の正の約数 d は，$0 \leq j \leq e$ および $c | m$ によって $d = p^j c$ の形に一意的に表され，さらに p^j と c は互いの素だから，前補題より，$\mu(d) = \mu(p^j)\mu(c)$ である． したがって，

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \left(\sum_{j=0}^{e} \mu(p^j) \right) \cdot \left(\sum_{c \mid m} \mu(c) \right)$$

であるが，

$$\sum_{j=0}^{e} \mu(p^j) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots + \mu(p^e) = 1 - 1 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

より命題を得る． □

11.2　数論的関数の畳み込み

自然数上で定義された関数を**数論的関数**という．オイラー関数 φ やメビウス関数 μ は数論的関数の例である．

定義 11.4 数論的関数 f, g の**畳み込み** $f * g$ とは，次のようにして定まる数論的関数のことである:

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g\Big(\frac{n}{d}\Big),$$

ここで，和は n の正の約数 d 全体をわたる．

なお，ここで定義した畳み込みは，正確には「ディリクレ畳み込み (Dirichlet convolution)」と呼ばれる．関数解析やフーリエ解析における「畳み込み積分」の類似ではあるが，別物なので注意が必要である．

定義 11.5 2 つの関数 $\mathbf{1}$ および ε を以下のように定める:

$$\mathbf{1}(n) = 1 \quad (\text{すべての } n \text{ に対して}), \qquad \varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

上で定義した関数は非常に簡単な数論的関数であるが，これらを用いると，命題 11.3 は，次のように，きわめてシンプルな式に書き換えることができる．

命題 11.6　$\mu * \mathbf{1} = \mathbf{1} * \mu = \varepsilon$.

証明　自然数 $n > 1$ に対して，命題 11.3 より

$$(\mu * \mathbf{1})(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \cdot \mathbf{1}\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d \mid n} \mu(d) = 0 = \varepsilon(n).$$

同様にして，$(\mu * \mathbf{1})(1) = 1 = \varepsilon(1)$ も確かめられるから $\mu * \mathbf{1} = \varepsilon$ を得る．$\mathbf{1} * \mu = \varepsilon$ も同様である． □

次に，畳み込みに関する一般的な性質をあげておく．

命題 11.7 任意の数論的関数 f, g, h に対して次が成り立つ．

(1) $f * g = g * f$,

(2) $(f + g) * h = f * h + g * h$,

(3) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(4) $f * \varepsilon = \varepsilon * f = f$.

証明 (2), (4) は難しくないので各自証明してみ． ここでは，(1), (3) のみ証明しよう．
(1) は，自然数 n に対する $(f*g)(n)$ の値が，$dd'=n$ をみたす自然数のペア (d,d') 全体をわたる和によって，$(f*g)(n)=\sum_{dd'=n} f(d)g(d')$ と書けることからわかる．
(3) についても，上の考え方を繰り返すことで，$((f*g)*h)(n)$ と $(f*(g*h))(n)$ はどちらも，$d_1d_2d_3=n$ をみたす自然数の組 (d_1,d_2,d_3) 全体をわたる和によって

$$\sum_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)$$

と表されることがわかり，(3) が得られる． □

定理 11.8 (メビウスの反転公式) 数論的関数 f,g に対して，

$$g(n)=\sum_{d\,|\,n} f(d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(n)=\sum_{d\,|\,n} \mu(d)\,g\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

がすべての自然数 n について成り立つ．

証明 畳み込みと関数 $\mathbf{1}$ の定義により，

$$\sum_{d\,|\,n} f(d)=\sum_{d\,|\,n} f(d)\cdot\mathbf{1}\Big(\frac{n}{d}\Big)=(f*\mathbf{1})(n),\quad \sum_{d\,|\,n}\mu(d)\,g\Big(\frac{n}{d}\Big)=(\mu*g)(n).$$

よって，「$g=f*\mathbf{1} \Leftrightarrow f=\mu*g$」を確かめればよいが，命題 11.6 と命題 11.7 より

$$g=f*\mathbf{1} \implies \mu*g=g*\mu=(f*\mathbf{1})*\mu=f*(\mathbf{1}*\mu)=f*\varepsilon=f,$$
$$f=\mu*g \implies f*\mathbf{1}=\mathbf{1}*f=\mathbf{1}*(\mu*g)=(\mathbf{1}*\mu)*g=\varepsilon*g=g$$

がいえて証明が完了する． □

11.3 応用

いきなりだけど，恒等式

$$\prod_{i=1}^{r}(1+x_i)=1+\sum_{s=1}^{r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le r} x_{i_1}\cdots x_{i_s}$$

が成り立つことに注意する． 自然数 $n>1$ の素因数分解を $n=\prod_{i=1}^{r} p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ とすると，定理 8.5 より，オイラー関数の値は

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{r}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)=n\left(1+\sum_{s=1}^{r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le r}\frac{1}{(-p_{i_1})\cdots(-p_{i_s})}\right)$$
$$=n\left(1+\sum_{s=1}^{r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le r}\frac{(-1)^s}{p_{i_1}\cdots p_{i_s}}\right)=n\sum_{d\,|\,n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d\,|\,n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

と計算される． よって，$f(n)=\varphi(n)$（オイラー関数），$g(n)=n$（恒等関数）とおいて，メビウスの反転公式（定理 11.8）を適用すれば，次の定理を得る．

定理 11.9 すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)=n$ が成り立つ．

逆に，定理 11.9 を（定理 8.5 を経由せずに）直接証明できれば，定理 8.5 の別証明が得られることになる． 実際にそれは可能である．

定理 11.9 の直接証明　n の約数 d をひとつとり $dd'=n$ とする． $\gcd(a,n)=d$ である自然数 $1\le a<n$ 全体の集合を A_d とする． $a\in A_d$ に対して，$h(a)=a/d$ とおけば，$\gcd(h(a),d')=1$ であって $1\le h(a)<d'$ をみたす． 逆に，$\gcd(b,d')=1$ かつ $1\le b<d'$ のとき，$bd\in A_d$ であって $h(bd)=b$ となることを確かめるのは難しくない． よって，全単射 $A_d\to(\boldsymbol{Z}/d'\boldsymbol{Z})^\times$ が定義でき，元の個数を比べれば $|A_d|=\varphi(d')=\varphi(n/d)$ を得る．一方，明らかに $\displaystyle\sum_{d\,|\,n}|A_d|=n$ であるから，$n=\sum_{d\,|\,n}\varphi(n/d)=\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)$ が示された．□

定義 11.10 k を複素数とする． $\sigma_k(n)=\displaystyle\sum_{d\,|\,n}d^k$ で定まる数論的関数 σ_k を**約数関数**という．

$\sigma_0(n)$ は n の正の約数の個数を表し，$\sigma_1(n)$ は n の正の約数の総和を表す（演習のプリント no.2 では，それぞれ T,S と書かれている）． 次の定理は，メビウスの反転公式から直接導かれる．

定理 11.11 任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{d\,|\,n}\sigma_k(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=n^k$ が成り立つ．

さて，自然数上の恒等関数を Id と書けば，$\mathrm{Id}*\mathbf{1}=\mathbf{1}*\mathrm{Id}=\varepsilon$ だから，定理 8.5 と定理 11.9 の関係は，命題 11.6, 11.7 を注意深く適用することで

$$\varphi=\mu*\mathrm{Id}\quad\Longleftrightarrow\quad\varphi*\mathbf{1}=\mathrm{Id}$$

で表されることがわかる． さらに，定義 11.10，定理 11.11 の関係も

$$\sigma_k=\mathrm{Id}_k*\mathbf{1}\quad\Longleftrightarrow\quad\sigma_k*\mu=\mathrm{Id}_k$$

で表される（ここで，$\mathrm{Id}_k(n)=n^k$ である）． このように，畳み込み $*$ を直接適用することで，既知の関係式をより簡明に理解したり，新しい複雑な関係式を導くことが可能である．たとえば，定理 11.9 および，定理 11.11 の $k=1$ の場合の式からわかる $\varphi*\mathbf{1}=\sigma_1*\mu$ に $*\mathbf{1}$ を適用すれば，$\varphi*\sigma_0=\sigma_1$ が得られる（$\mathbf{1}*\mathbf{1}=\sigma_0$ を確かめれば証明できるので，各自トライしてみよ）． よって次の公式が得られたことになる．

命題 11.12 すべての自然数 n に対して，$\displaystyle\sigma_1(n)=\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)\sigma_0\left(\frac{n}{d}\right)$ が成り立つ．