

第4章 素数と素因数分解の一意性

4.1 素数の定義

定義 4.1 整数 p が素数であるとは、 $p > 1$ であって、 $1 < d < p$ をみたす約数 d をもたないものである。

素数でも ± 1 でもない整数を合成数という (± 1 は単数とよばれるが、いまは忘れちゃってもいい)。一般に、整数 $n \neq 0$ に対して、 $\pm 1, \pm n$ を n の自明な約数という。したがって、素数とは自明な約数しかもたない 1 より大きい整数のことである。この定義は、“ p の約数”を用いて述べられているが、以下のように“ p の倍数”を用いて素数を特徴づけることもできる。

命題 4.2 整数 p が素数であるためには次が成り立つことが必要十分である； $p > 1$ であって、 $a, b \in \mathbf{Z}$ に対してその積 ab が p の倍数ならば、 a または b は p の倍数である。

証明 必要性 p が素数であるとする。いま、 $p|ab$ を仮定する。 a, p の最大公約数 d は p の正の約数だが、 p が素数なので、 $d = p$ または $d = 1$ となる。 $d = p$ のとき、 $p|a$ である。一方、 $d = 1$ のときは、定理 2.6 (または 3.4) より、 $ax + py = 1$ ($x, y \in \mathbf{Z}$) と表されるから、 $b = abx + pby$ は p の倍数となる。

十分性 $d > 0$ を p の約数とすると、 $p = cd$ ($c \in \mathbf{Z}$) と書ける。もちろん $p|cd$ だから、仮定より $p|c$ または $p|d$ である。 $p|c$ ならば $pk = c$ ($k \in \mathbf{Z}$) と表されるから、 $p = cd = pkd$ 、よって $kd = 1$ より $d = 1$ を得る。 $p|d$ のときは、 $pl = d$ ($l \in \mathbf{Z}$) と書け、 $p = cd = cpl$ 、よって $cl = 1$ だから $c = 1$ すなわち $d = p$ となる。以上より、 p の正の約数は $1, p$ しかないことが示されたから、 p は素数である。□

定理 4.3 (初等数論の基本定理) 1 より大きい任意の自然数 a は素数 p_1, \dots, p_r の積

$$a = p_1 \cdots p_r$$

として表すことができ、順序を考えなければその表し方は一意的である。すなわち、二通りの素数の積

$$a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$

に表されたとすると、 $r = s$ であって、さらに q_1, \dots, q_r の番号をうまくとり換えれば $p_1 = q_1, \dots, p_r = q_r$ とできる。(より正確に書けば、 $\{1, 2, \dots, r\}$ 上の置換 σ で $p_i = q_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, r$) をみたすものが存在する。)

証明 素数の積に表せること: 素数の積で書けない 1 より大きい自然数が存在するとして矛盾を導こう. 最小値原理によって, そのような最小の自然数 a がとれる. a はもちろん素数ではないから, $a = bc$, $1 < b, c < a$ となる $b, c \in \mathbf{N}$ が存在する. このとき, a の最小性より b, c は素数の積で書けるので, その積 a も書けることになり矛盾する.

表し方の一意性: 二通りの素数の積として書ける自然数が存在するとして矛盾を導く. そのような最小の自然数を a とし, $a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ を二通りの素数の積とする. p_1 が素数でかつ $p_1 | q_1 \cdots q_s$ なので, 命題 4.2 を (何度か) 使えば, $p_1 | q_j$ をみたく j がとれることがわかる. 順序を入れ換えて $j = 1$ すなわち $p_1 | q_1$ であるとしてよい. ここでさらに q_1 が素数であることから $p_1 = q_1$ を得る. したがって, $p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$ であつて, 仮定より, 両辺の積の表し方は (順序を入れかえたとしても) 同じにはならない. しかも, この積は a よりも小さいので, a の最小性に矛盾することになる. \square

自然数 a を素数の積に表すことを a の素因数分解といい, 積に現れる素数を a の素因数または素因子という ($a = 1$ のときも 0 個の素因数をもつと考えて素因数分解を考えることにする). 定理 4.3 の後半の主張はとくに素因数分解の一意性と呼ばれる. 定理において, p_i のうち同じものをまとめることで,

$$a = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \quad (p_1, \dots, p_r \text{ は相異なる素数, } e_i \geq 1)$$

と表すことができる. さらに必要ならば, p_i が素因数でない場合でも $e_i = 0$ として積に含めることができる (このとき $p_i^{e_i} = 1$ に注意). たとえば, $20 = 2^2 \cdot 5^1 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$. このような表し方も素因数分解とよぶことにする.

次の定理および系の証明は演習とする.

定理 4.4 自然数 a, b の素因数分解が

$$a = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}, \quad b = p_1^{f_1} \cdots p_r^{f_r} \quad (p_1, \dots, p_r \text{ は相異なる素数, } e_i, f_i \geq 0)$$

与えられたとき, 次が成り立つ.

- (1) $a | b \iff e_i \leq f_i \ (i = 1, \dots, r)$.
- (2) $d_i = \min(e_i, f_i) \ (i = 1, \dots, r)$ とおけば, $\gcd(a, b) = p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r}$.
- (3) $m_i = \max(e_i, f_i) \ (i = 1, \dots, r)$ とおけば, $\text{lcm}(a, b) = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$.

系 4.5 自然数 a, b に対して $d = \gcd(a, b)$, $m = \text{lcm}(a, b)$ とすると, $ab = dm$ が成り立つ.

p を素数とする. 自然数 a に対して, $p^e | a$ であるが $p^{e+1} \nmid a$ であるような整数 $e \geq 0$ がとれる. この e を $v_p(a)$ で表すと, a の素因数分解は

$$a = \prod_{p: \text{素数}} p^{v_p(a)}$$

と表すことができる. $v_p(-a) = v_p(a)$, $v_p(0) = \infty$ と定めることで, v_p を \mathbf{Z} 上の関数とみなすことができる (ただし, 値として ∞ も許す). この関数 v_p を p 進付値というが, 詳しい性質や使い方については, 演習で...

4.2 素数が無限個あること

次の定理は当たり前のようにであるが、定理 4.3 との関連を考えると重要である。

定理 4.6 素数は無数に存在する。

以下において 2 通りの証明を与える（時間が許せば、講義でさらに別の証明も紹介する）。ひとつはユークリッドによる証明であり古代からよく知られていた方法、もうひとつは、オイラーによる示唆に富んだ方法である。

証明 (ユークリッド) 素数が有限個しかないとして矛盾を導く。すべての素数を p_1, \dots, p_r とし、 $M = p_1 \cdots p_r + 1$ とおく。定理 4.3 より、 M はある素数で割り切れるが、素数は p_1, \dots, p_r のどれかだから、それを p_i とする。このとき、 $1 = M - p_1 \cdots p_r$ が素数 p_i の倍数となって矛盾である。□

2 つ目の証明の準備として次のようなことを考える。2 と 3 以外の素因数をもたない自然数を小さい順に並べ、それら全体の逆数和を A とする。

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \cdots$$

これを眺めても何だかよくわからないが、分母は $2^m 3^n$ の形をしているから、

$$A = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{2^m 3^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^m 3^n} \right) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \right)$$

と変形できるであろう。ここで、等比級数に関する公式を用いれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

なので、はじめに与えた無限級数 A は確かに収束してその値は $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ となることがわかる。この議論が正当化される理由は、絶対収束級数においては、和の順序をかってに換えたり、分配法則を自由に使って良いという性質があるからである（「微分積分」で教わったことを思い出そう... もし忘れちゃってたら微積の単位没収だぞ!）。

以上の考察をふまえてオイラーによる定理 4.6 の証明を紹介する。

証明 (オイラー) ここでも、素数は有限個しかなく、それらすべてが p_1, \dots, p_r であるとして矛盾を導くことにする。いま、各素数 $p = p_i$ について

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$$

であるが、これらの積をとれば（上での説明と同じようにして）

$$(\spadesuit) \quad \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}} = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{m_1}} \right) \cdots \left(\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{p_r^{m_r}} \right) = \frac{p_1}{p_1-1} \cdots \frac{p_r}{p_r-1}.$$

一方, p_1, \dots, p_r がすべての素数であることから, 定理 4.3 より, 任意の自然数は

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} \quad (m_1, m_2, \dots, m_r \geq 0)$$

の形をしていることがいえる. よって, (♠) の左辺はすべての自然数の逆数和であり

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{p_1 \cdots p_r}{(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)}$$

となるが, 左辺は収束しない (これも微積でやったはず) から矛盾である. \square

4.3 ゼータ関数

オイラーは, 自然数 n の代わりにべき数 n^s の逆数和を考え, 無限級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

が $s > 1$ のとき収束することに注目し, 上の証明の手法を用いて, 公式

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (s > 1)$$

を得ている. ここで, 右辺は素数全体をわたる積である. さらに,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{など} \dots$$

s が正の偶数のときの $\zeta(s)$ の値を得ている (1730 年代). ここに円周率 π が現れるのは, なんとも不思議である. その後, リーマンは s の動く範囲を複素数にまで広げ, 複素関数としての $\zeta(s)$ (これをゼータ関数という) の性質を調べている. その目的はガウスが予想した素数定理の証明であったが, 研究途上で有名な予想を提唱した (1859 年).

予想 4.7 (リーマン予想 (Riemann Hypothesis)) $\zeta(s) = 0$ をみたす実部が正の複素数 s はすべて $s = \frac{1}{2} + it$ (t は実数) の形をしているであろう.

リーマン予想は 150 年以上経過した現在でも未解決の問題として残っている. なお, 素数定理そのものはリーマン予想がなくても証明できることが知られている.

定理 4.8 (素数定理) 正の実数 x に対して, x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とすると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

すなわち, 十分大きな x について $\pi(x)$ は $\frac{x}{\log x}$ で近似される. 証明は, アダマールとド・ラ・ヴァレー・プーサンが独立に与えた (1896 年). その方法は複素関数論 (複素数上の微積分学) によるものだが, 証明を書き下すだけの余白が, ここにもやっぱ無い.