第1章　はじめに

1.1　ピタゴラス方程式

ピタゴラスの定理（三平方の定理）は古くから知られている．

定理 1.1 直角3角形の直角をはさむ2辺の長さを a, b とし，他の1辺の長さを c とすれば，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ．

長さが整数または有理数である直角3角形を見つけることは，方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

の自然数解を求めることに帰着する． このように自然数や整数，または有理数の解に着目する場合，上記方程式は**ピタゴラス方程式**と呼ばれる． 次の定理は古くから知られていたようである．

定理 1.2 ピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

の自然数解は，$u > v$ をみたす自然数 u, v をとって

$$(x, y, z) = (u^2 - v^2,\ 2uv,\ u^2 + v^2) \quad \text{または} \quad (2uv,\ u^2 - v^2,\ u^2 + v^2)$$

とおくことによりすべて得られる．

たとえば，$u = 2, v = 1$ あるいは $u = 3, v = 2$ とすれば，

$$(x, y, z) = (3, 4, 5), \quad (5, 12, 13)$$

といったよく知られた解が得られるし，$u = 2015, v = 918$ をとれば，

$$(x, y, z) = (3217501, 3699540, 4902949)$$

というあまり知られていない（っていうか誰も知らない）解も出てくる． Maple を使ってこれらの計算を確かめてみよ．

2015 年度「代数入門」講義資料（2015 年 09 月）ver.0918

さて，定理 1.2 において，u, v の式によって与えられた x, y, z がピタゴラス方程式の解であることは，恒等式

$$(U - V)^2 + 4UV = (U + V)^2$$

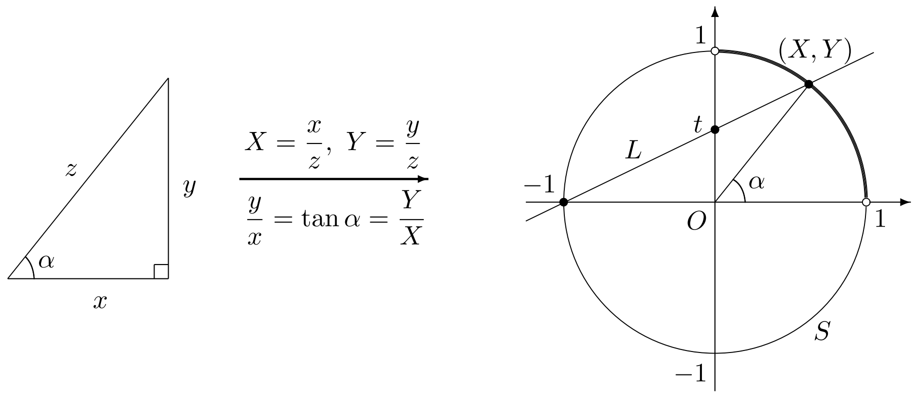
からすぐにわかる（$U = u^2, V = v^2$ とせよ）．したがって，定理が言いたいことは，<u>ピタゴラス方程式のすべての自然数解が，u, v によって上のように得られる</u>ということである．この証明は講義で行うが，それは整数論的な証明である．以下では，別証明，それも整数論とは直接関係なさそうに見える幾何学的な証明のアウトラインを述べよう．

ピタゴラス方程式の自然数解を求めることは，

$$X^2 + Y^2 = 1$$

の正の有理数解を求めることと同等であることに注意する．実際，$x^2 + y^2 = z^2$ の解 (x, y, z) から $X = x/z,\ Y = y/z$ とすれば $X^2 + Y^2 = 1$ の解が得られ，$X^2 + Y^2 = 1$ の解 (X, Y) を通分して $X = x/z,\ Y = y/z$ と表わせば $x^2 + y^2 = z^2$ の解が得られるからである（くどい？）．

このようにして，ピタゴラス方程式の自然数解は，原点を中心とする半径 1 の円周 S の上にある，正の有理数を座標にもつ点（つまり第 1 象限にある点）と対応付けられることになる．いま，そのような点 (X, Y) と点 $(-1, 0)$ を通る直線 L を考えよう．L の y-切片は傾き t と一致することはすぐにわかるが，この t（$0 < t < 1$）と点 (X, Y) が 1 対 1 に対応することも下図から明らかであろう．



直線 L の定義式 $Y = tX + t$ から

$$t = \frac{Y}{X + 1}$$

が得られるが，さらに $S:\ X^2 + Y^2 = 1$ と連立させれば，簡単な計算により

$$X = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad Y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

が求まる．これらの式から，X, Y がともに有理数であることと t が有理数であることは同値であることがわかる．そこで，t を自然数の商として表せば，定理 1.2 が得られるのであるが，詳細は演習問題としておこう．

1.2　フェルマーの最終定理

ピタゴラス方程式は 2 次式で表されているが，これを 3 次にするとどうなるか？ フェルマー（17 世紀の人）は，そのような方程式には自然数解がなく，さらに 4 次以上でも同様に自然数解がないと述べている． さらに，ある本の余白に,「その『驚くべき証明』を発見したがそれを記すにはこの余白は狭すぎる」と書き残した． 現在まで彼の証明は見つかっていない．

定理 1.3 (フェルマーの最終定理) 自然数 $n \geq 3$ に対して，方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

は自然数解をもたない．

この定理は，長い間証明が知られていなかったので，かつては『フェルマー予想』とも呼ばれ，整数論における難問のひとつであった． フェルマー自身によって $n = 4$ の場合が証明され，$n = 3$ に対してはオイラーが証明を与えている（それぞれ，17, 18 世紀）． その後，ソフィー・ジェルマン，ディリクレ，クンマー等の貢献により，19 世紀中に 100 までのすべての n に対して正しいことが確かめられたが，20 世紀になって整数論や代数幾何学の理論が少しずつ整えられた結果，1994 年ワイルズによって完全な証明が与えられた．その証明は数多くの高度な理論を駆使して構成され，大胆な発想に満ちているが，その概略の一部だけでも紹介するにはこの余白は狭すぎる（なんちゃって）．

1.3　有名な問題

一般に数学の問題は難しい概念を用いて語られ，専門に学んだ人でなければ問題を理解することすら困難であることが多い． しかし，整数論の問題は初等的に表現されるものもあり，それらの多くは中高生でも（もしかすると小学生でも）理解できる． ただし，問題が初等的に表現されるからといって，必ずしも初等的に解けるとはいえず，未解決のまま残ることも往々にしてある． 前述の『フェルマーの最終定理（フェルマー予想)』も 20 数年前まではそんな類の問題であった． 他にもいくつかあるので思いつくままに列挙してみる．

素数が無限個存在することは古代から知られているが，$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19)$ のように差が 2 である素数のペアも無数にありそうである． このようなペアを**双子素数**という． 計算を続けていくといくらでも大きなペアが見つかる，たとえば $(20160401, 20160403)$ など． Maple を使ってもっと探してみよ．

予想 1.4 (双子素数予想) 双子素数は無限組存在するであろう．

双子素数は差が 2 である素数のペアであるが，2013 年，差が 7 千万以下である素数のペアが無数にあることが Y. Zhang によって証明された． “2 と 7 千万” では雲泥の差があるよ

うだが，この証明以前には “2 と無限大” であったのだから，画期的な結果と言って良いであろう． その後すぐに改良が進み，7 千万が 246 に置き換えられることがわかった． いずれ，近いうちに 246 が 2 に改良され「双子素数予想」は解決されるのだろうか，それとも，新たな問題が出てきて未解決のままになるのだろうか…….

18 世紀半ば，ゴールドバッハはオイラーに宛てた手紙の中で，6 以上のすべての自然数は三つの素数の和で書けるだろう，という予想を述べた． 偶数をそのような和で表せば素数のうち一つは 2 になっているはずだから，この予想は次のように述べることができる．

予想 1.5 (ゴールドバッハの予想) 6 以上の任意の偶数は二つの素数の和として表すことができるであろう．

その数より小さい約数の和がその数になるとき**完全数**という． たとえば，28 はその約数 $1, 2, 4, 7, 14$ の和と等しいので完全数である． $2^n - 1$ が素数のとき $2^{n-1}(2^n - 1)$ が完全数となることは古代から知られていた． さらにオイラーによって，偶数の完全数は必ずこのように表されることも証明されている．

予想 1.6 偶数の完全数は無限に存在するであろう．

この予想は，$\underline{2^n - 1 \text{ の形の素数が無数にあるだろう}}$ ということと同じである． このような素数は**メルセンヌ素数**と呼ばれ，現在 (2015 年 9 月) までに 48 個しか見つかっていない． 知られている最大のメルセンヌ素数は，$2^{57885161} - 1$ である． なお，奇数の完全数は一つも発見されていない．

予想 1.7 奇数の完全数は存在しないであろう．

もし存在すれば，10^{300} より大きく，9 個以上の相異なる素因数をもち，さらにその素因数のうち少なくとも一つは 10^8 より大きいことが示されているが，もちろんこれで予想が確認できたわけではない．

次に紹介する予想は少し風変わりである． 自然数 n が偶数ならば $n/2$ とし，1 より大きい奇数ならば $3n + 1$ とする操作を考える． たとえば 6 から始めてこの操作を繰り返しほどこすと，$6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ のように最後は 1 となって止まる． 少し計算を試してみると，どんな自然数についても操作を続けると最後は 1 に到達するようである．

予想 1.8 (コラッツの予想) すべての自然数は，この操作を繰り返しほどこすことで必ず 1 になるであろう．

この予想は $3n + 1$ 予想とも呼ばれる． 整数論には，どうやってアプローチしたらよいかその糸口すら見つからない問題がよくあるが，この予想もそのような類の問題のひとつである．