8　資料 2: 同値関係 - トランプの組み分けを例に -

整数の合同式や剰余類は**同値関係とその同値類/商集合**と呼ばれる概念のもっとも基本的な例です. 同値関係は代数以外にもたびたび現れる非常に重要な概念なのですが, 初めはなかなか理解しにくいものです. しかし, これがわかると関係する多くのことがすっきりと理解できたりします. ある人は「関数の一様連続性, 線形写像の表現行列と同値関係の 3 つがきちんと理解できればその時点で数学科卒業を認定してもよいと思う」とさえ言います.

ここでは講義の内容からは少し離れ, トランプの組み分けを例にとって同値関係の基本的な考え方を説明します. 頑張って早いうちに理解できれば今後の勉強が格段に楽になることを保証します. はじめに言っておきますが, ここでの「同値関係」とは「命題が同値である」という時に使う同値とはとりあえず別物です[1].

8.1　トランプのカードの集合

まずトランプのカードについて確認しましょう. トランプは次の 54 枚のカードからなります.

$$\clubsuit 1 \sim \clubsuit 13, \quad \diamondsuit 1 \sim \diamondsuit 13, \quad \heartsuit 1 \sim \heartsuit 13, \quad \spadesuit 1 \sim \spadesuit 13, \quad J_1 \text{ (Joker1)}, \quad J_2 \text{ (Joker2)}.$$

数字が 1,11,12,13 のカードは絵札 (それぞれ Ace, Jack, Queen, King) になっています. カードの柄については, (印刷の関係で白黒ですが)$\clubsuit$ と $\spadesuit$ が黒で $\diamondsuit$ と $\heartsuit$ が赤です. ここでは便宜上 Joker は**灰色の絵札で数字 0 が書いてある**と考えることにします. これら 54 枚のカード全体からなる集合を T と表すことにします.

$$T = \{\clubsuit 1,\ \clubsuit 2,\ \cdots,\ \spadesuit 12,\ \spadesuit 13,\ J_1,\ J_2\}.$$

8.2　トランプの組み分け

トランプの組み分けを考えてみます. ただ「組に分ける」と言ってもどうしていいかわからないので, まず**どういう基準で分けるか**をはっきりさせないといけません. 後で正確に述べるように, 「同値関係」とはこのような組み分けの基準を抽象的に定義したものなのです. トランプを分ける基準はいろいろ考えられますが, 例えば次の 4 つの基準を考えてみます.

(柄) 柄が同じかどうかで分ける.

(絵) 絵札か数札かで分ける.

(色) 柄の色が同じかどうかで分ける.

(偶) 数字が偶数か奇数かで分ける.

それぞれの基準で T を仲間分けをすると結果は次のようになります.

(柄) $\longrightarrow$ $\boxed{\clubsuit}$, $\boxed{\diamondsuit}$, $\boxed{\heartsuit}$, $\boxed{\spadesuit}$, $\boxed{J}$ の 5 種類.

(絵) $\longrightarrow$ 数札 $\boxed{\text{数}}$ と絵札 $\boxed{\text{絵}}$ の 2 種類.

(色) $\longrightarrow$ 黒カード $\boxed{\text{黒}}$ と赤カード $\boxed{\text{赤}}$ と灰色カード $\boxed{\text{灰}}$ の 3 種類.

(偶) $\longrightarrow$ 偶数札 $\boxed{\text{偶}}$ と奇数札 $\boxed{\text{奇}}$ の 2 種類.

[1] **2011 年度「代数入門演習」担当 藤田玄さんの作成資料です. 力作です.**

ここで, 例えば $\boxed{\clubsuit}$ は柄が $\clubsuit$ のカードを全てをひとまとめにした集合を, $\boxed{\text{数}}$ は全ての数札をひとまとめにした集合を表しています. つまり,

$$\boxed{\clubsuit} = \{\clubsuit 1,\ \clubsuit 2, \cdots,\ \clubsuit 12\}, \quad \boxed{\text{数}} = \{\clubsuit 1, \diamondsuit 1, \cdots, \heartsuit 10, \spadesuit 10\}$$

です. この記号を使うとそれぞれの基準によって T が次のように分解されます.

(柄) $\longrightarrow T = \boxed{\clubsuit} \cup \boxed{\diamondsuit} \cup \boxed{\heartsuit} \cup \boxed{\spadesuit} \cup \boxed{J}$.

(絵) $\longrightarrow T = \boxed{\text{数}} \cup \boxed{\text{絵}}$.

(色) $\longrightarrow T = \boxed{\text{黒}} \cup \boxed{\text{赤}} \cup \boxed{\text{灰}}$.

(偶) $\longrightarrow T = \boxed{\text{偶}} \cup \boxed{\text{奇}}$.

定義 8.1. 2 枚のカード x と y が (柄) の基準で仲間であることを

$$x \overset{(\text{柄})}{\sim} y,$$

(柄) の基準では仲間でないことを,

$$x \overset{(\text{柄})}{\not\sim} y$$

と表すことにします. 同様に $\overset{(\text{絵})}{\sim}$, $\overset{(\text{絵})}{\not\sim}$ などが定義できます. 例えば $\spadesuit 8 \overset{(\text{柄})}{\sim} \spadesuit 11$, $\heartsuit 5 \overset{(\text{絵})}{\not\sim} J_1$, $\diamondsuit 4 \overset{(\text{色})}{\sim} \heartsuit 1$, $J_2 \overset{(\text{偶})}{\not\sim} \clubsuit 9$ です.

8.3 整数の仲間分け

次に, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ での仲間分けを考えてみます. ここでも, まずどういう基準で分けるか決めます. 例えば次のような関係 $\overset{(\text{四})}{\sim}$ による仲間分けを考えてみます.

定義 8.2. 2 つの整数 a, b に対して

$$a \overset{(\text{四})}{\sim} b \overset{\text{def}}{\iff} a \text{ と } b \text{ は } 4 \text{ で割った余りが同じ}.$$

つまり 4 で割った余りがいくつか, という基準で仲間分けをしてみます. $\overset{(\text{四})}{\sim}$ で $\mathbb{Z}$ を仲間分けすると次のようになります.

$$\mathbb{Z} = \boxed{0} \cup \boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{3}.$$

先ほどと同様に例えば $\boxed{0}$ は 4 で割って余りが 0 の整数 (=4 の倍数) 全体の集合です.

$$\boxed{0} = \{0, \pm 4, \pm 8, \cdots\}.$$

つまり,

$$\boxed{0} = 4\mathbb{Z},\ \boxed{1} = 1 + 4\mathbb{Z},\ \boxed{2} = 2 + 4\mathbb{Z},\ \boxed{3} = 3 + 4\mathbb{Z}$$

です. もっと略して $\boxed{1} = \bar{1}$ と書くこともあります. いま,

$$a \overset{(\text{四})}{\sim} b \iff a - b \text{ は } 4 \text{ の倍数} \iff a \equiv b \bmod 4$$

なので $\overset{(\text{四})}{\sim}$ による仲間分けは 4 を法とした剰余類を考えていることに他なりません.

ここでの「4」という数字に深い意味はありません. 一般に自然数 m に対して m を法とした合同類 (m で割った余りが等しいものを仲間とする) によって

$$\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cup (1 + m\mathbb{Z}) \cup \cdots \cup ((m-1) + m\mathbb{Z})$$

という分解ができます.

8.4　同値関係 = 仲間分けの基準

これまで, トランプのカードの集合 T や整数の集合 $\mathbb{Z}$ において「どんな関係にあるときに 2 つの要素が仲間であるか」を決め, それで仲間分けすることを考えてきました. すでにみたようにどんな関係 (基準) を考えるかは何通りもあります. しかしどんな関係を使ってもきれいな仲間分けができるわけではありません.

例 8.3. トランプカードの集合 T において, 「$\overset{(偶)}{\sim}$」を少し変えて, 「a の数字と b の数字の積が偶数」のとき, $a \sim b$ と表すことにします. この $\sim$ を使って T を**きれいにグループ分けすることはできません**. 例えば, $\clubsuit 3 \not\sim \clubsuit 3$ なので $\clubsuit 3$ を含むグループに自分自身の $\clubsuit 3$ を入れることができません. また, $\clubsuit 1 \sim \heartsuit 2$ かつ $\heartsuit 2 \sim \diamondsuit 3$ ですが $\clubsuit 1 \not\sim \diamondsuit 3$ です. こうなってしまうと $\clubsuit 1$ と $\heartsuit 2$ のグループに $\diamondsuit 3$ を入れていいかどうかはっきりしません.

上の例の関係 $\sim$ は, 「自分は自分と仲間」**(反射律)** や「仲間の仲間は仲間」(**推移律**) という性質をみたしていません. 実はこれら 2 つの性質と「a が b の仲間なら b は a の仲間」**(対称律)** という性質さえみたされていればきれいなグループ分けに使うのに必要にして十分な関係である, ということが知られています[2]. そのような関係を一般に**同値関係**と呼ぶことにします. 一般的な定義を述べると以下のようになります.

定義 8.4 (同値関係)**.** X を集合とする. X の 2 つの要素の間の (2 項) 関係 $\sim$ が任意の $a, b, c \in X$ に対して次を満たすとき, $\sim$ を X の**同値関係**という.

(反射律) $a \sim a$.

(対称律) $a \sim b \implies b \sim a$.

(推移律) $a \sim b,\ b \sim c \implies a \sim c$.

例 8.5. 以下は全て同値関係の例です.

1. トランプカードの集合 T における関係 $\overset{(柄)}{\sim}$, $\overset{(色)}{\sim}$, $\overset{(絵)}{\sim}$, $\overset{(偶)}{\sim}$.
2. $\mathbb{Z}$ において, 自然数 m を法とする合同関係 $\equiv$.
3. 全ての人間の集合 $\mathcal{H}$ において, x **さんと** y **さんの誕生日が同じ**という関係 : $x \sim y$.
4. 平面上の多角形全ての集合 $\mathcal{P}_2$ において, **2 つの多角形** P_1 **と** P_2 **が相似である**という関係 : $P_1 \backsim P_2$.

例 8.6. 以下は**同値関係ではありません.**

1. T において カード a の数字がカード b の数字以下であるという関係 : $a \preceq b$.
2. $\mathbb{Z}$ において x が y 以下であるという関係 : $x \leq y$.
3. $\mathcal{H}$ において, a さんが b さんの誕生日を知っている, という関係 : $a \to b$.
4. $\mathcal{P}_2$ において, P が P' に含まれるという関係 : $P \subset P'$.

これら全ては**対称律を満たしません. 3 は推移律も満たしません.** 一方, 2 と 4 は反射律・推移律と以下の**反対称律**を満たします. (1 が反対称律を満たさない理由を考えてみて下さい.)

(反対称律) $a \sim b,\ b \sim a \implies a = b$.

一般に, 集合 X 上の反射律と推移律と反対称律を満たすような関係を X の**順序関係**といいます. 順序関係は数字の大小関係の一般化で, 順序関係を使うと X の要素をその順序に沿って並べることができます. (しかし, 4 の例のように「一列」に並ぶとは限りません.)

---

[2] ここでは「きれいなグループ分け」という意味を全く説明していないので, 納得できないかもしれませんが, 詳しく知りたい人には直接説明します.

8.5　同値関係による剰余類の集合 = 仲間分けの結果

ここからは一般的に話を進めますが, トランプや整数の仲間分けの例を常に思い浮かべて下さい. 集合 X 上になにか同値関係 $\sim$ があったとします. $\sim$ を使った仲間分けとは要するに次のような操作です.

1. $x \in X$ を任意に選び, x の仲間 (x と同値な要素) を全て集めた集合を $C(x)$ とする:
$$C(x) := \{x' \in X \mid x' \sim x\}.$$
$C(x)$ は X の部分集合であり, x **の定める同値類**という.
2. 同値類は次を満たす : $x \in C(x),\ x \sim x' \Leftrightarrow C(x) = C(x'),\ x \not\sim x' \Leftrightarrow C(x) \cap C(x') = \emptyset$.
3. 全ての $x \in X$ [3] で同値類を考えると, X は同値類達の和集合になる : $X = \bigcup_x C(x)$.
これを X **の同値関係 $\sim$ による同値類への分割**という.
4. 全ての同値類の集合を X **の同値関係 $\sim$ による剰余類の集合**といい, $X/\sim := \{C(x) \mid x \in X\}$ と表す.

例 8.7. これらの定義をトランプや $\mathbb{Z}$ の例で具体的に見てみましょう.

(1) T において $\overset{\text{柄}}{\sim}$ を考えます. 例えば $x = \heartsuit 3$ とすると, $C(x) = \{$ 柄が$\heartsuit$のカード $\} = \boxed{\heartsuit}$ です. 柄は 5 種類なので同値類は 5 つで, $T = \boxed{\clubsuit} \cup \boxed{\diamondsuit} \cup \boxed{\heartsuit} \cup \boxed{\spadesuit} \cup \boxed{J}$ です. したがって T の $\overset{\text{柄}}{\sim}$ による剰余類の集合は
$$T/\overset{\text{柄}}{\sim} = \left\{\boxed{\clubsuit}, \boxed{\diamondsuit}, \boxed{\heartsuit}, \boxed{\spadesuit}, \boxed{J}\right\}$$
となります.

(2) $\mathbb{Z}$ において $\overset{\text{四}}{\sim}$ を考えます. 例えば $x = 1$ とすると, $C(x) = \{4$ で割って余り 1 になる整数$\} = \{1, -3, 5, -7, \cdots\} = 1 + 4\mathbb{Z} = \bar{1}$ です. 4 で割った余りは 0 から 3 までの 4 つなので同値類は全部で 4 つで, $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}$ です. したがって $\mathbb{Z}$ の $\overset{\text{四}}{\sim}$ による剰余類の集合は
$$\mathbb{Z}/\overset{\text{四}}{\sim} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$
となります. これは剰余類の集合 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同じものです. 一般に, 剰余類の集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とは m を法とした合同関係から決まる $\mathbb{Z}$ の同値関係による剰余類の集合なのです. また, $\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$ のような剰余類の間に定義した和や積は, m で割ったあまりに関する仲間たちがもつ性質 (「4 で割って 1 余る数と 3 余る数を足すとあまりは 0」) を数式で表したものなのです.

8.6　問題編

問題 8.1. T における $\overset{(\text{柄})}{\sim}$ 以外の同値関係について, その剰余類の集合を求めよ.

問題 8.2. 次の関係 $\sim$ は同値関係/順序関係であるか? 同値関係ならその剰余類の集合を求めよ.

(1) $X = \mathbb{R}$ において, $x \sim x' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - x' \in \mathbb{Z}$.

(2)$X = \mathbb{R}^2$ において, $(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x < x'$ または「 $x = x'$ かつ $y \leq y'$」.

(3) $X = \mathbb{R}$ において, $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} xy \geq 1$.

(4) $X = \mathbb{N}$ において, $a \sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = 2^n b$.

(5)$X =$「地球の表面」において, $a \sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b$ の緯度が a の緯度以上.

---

[3] 2 つめの性質から x と同値な x' に対しては $C(x) = C(x')$ となるので, 実際は「全ての x」を考える必要はなく, グループの代表者を決めて考えればよいです. このような代表者を**同値類の代表元**といいます.