

## 5 素因数分解の一意的性 (2), 素数, 合成数

### 5.1 一意的であるとは

講義プリントの定理 4.3 で初等整数論の基本定理というものを教わったと思います. それは簡単にいうと次のものです.

定理 5.1 (初等整数論の基本定理). 任意の自然数は素数の積に分解 (素因数分解) でき, さらにその分解の結果は順序を除いて一意的である.

分解できる, という意味はわかると思います. どんなに大きい数でも小さい素数から順に割っていけば, 最終的には素因数分解できそうですよね. 順序を除いて一意的であるというのは次のような意味です.

ある数を 2 つの全く別のやり方で素因数分解したとしても, その結果を並べ直すと必ず同じになる.

言い換えると, ある数を誰かが超斬新なやり方で素因数分解したとしても, その結果を並べ直すと, 小さい素数から割っていった素直な分解と同じになる, ということです. そんなの当たり前だと思うかもしれませんが, 当たり前だと堂々と言うためには証明もぜひ理解して下さい. (また, こういう分解の一意的性が成り立たないような数の集合 (環) もあります. 詳しくは代数 I でやるとと思います.) この一意的である, という一見当たり前前の性質はいろいろな命題の証明に使われます. 一例として,  $\sqrt{5}$  が無理数であることの証明を復習しましょう<sup>1</sup>.

命題 5.2.  $\sqrt{5}$  は無理数である.

証明. 背理法で示す.  $\sqrt{5}$  が有理数であると仮定すると, ある自然数  $m, n$  が存在して

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m}$$

となる. 両辺に  $m$  をかけて 2 乗して  $5m^2 = n^2$  を得る.  $m, n$  の素因数分解をそれぞれ

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}, \quad n = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \cdots q_l^{f_l}$$

とする.  $5m^2 = n^2$  より

$$5p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \cdots p_k^{2e_k} = q_1^{2f_1} q_2^{2f_2} \cdots q_l^{2f_l} \quad \dots (*)$$

となる. 左辺は素因数 5 をもち, 素因数分解が一意的であることから右辺にも素因数 5 が含まれる. つまり,  $q_1, q_2, \dots, q_l$  のどれかは 5 である. 簡単のため  $q_1 = 5$  とする. (\*) の両辺を  $5 = q_1$  で割って,

$$p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \cdots p_k^{2e_k} = q_1^{2f_1-1} q_2^{2f_2} \cdots q_l^{2f_l}$$

となる. 左辺は全ての素因数を偶数個もつが, 右辺は素因数  $q_1$  を奇数個もつ. これは素因数分解が一意的であることに矛盾. よって  $\sqrt{5}$  は有理数でない, つまり無理数である.  $\square$

<sup>1</sup>確認ですが, 無理数 = 「有理数でない実数」,  $\sqrt{5}$  = 「2 乗して 5 になる正の実数」です. そういう数が実数として存在することは微積 I でしつこくやったことですね.

この証明を使って次を2通りのやり方で示してみましょう。(細部は省略します.)

命題 5.3.  $\frac{4-\sqrt{5}}{3} (> 0)$  は無理数である.

[証明 1.] (命題 5.2 の証明そのものをまねてみる.)  $\frac{4-\sqrt{5}}{3}$  が有理数であると仮定すると, ある自然数  $m, n$  が存在して

$$\frac{4-\sqrt{5}}{3} = \frac{n}{m}$$

となる. 変形すると,

$$5m^2 = (3n - 4m)^2$$

となる.  $l := |3n - 4m|$  はその素因数分解に 5 を含む ( $5 \mid l^2$  により  $5 \mid l$ ).  $5m^2 = l^2$  の両辺を見ると, 左辺には 5 が奇数回, 右辺には 5 が偶数回現れるから素因数分解の一意性に矛盾が生じる. よって  $\frac{4-\sqrt{5}}{3}$  は無理数である.  $\square$

[証明 2.] (命題 5.2 を使う.)  $x := \frac{4-\sqrt{5}}{3}$  が有理数であると仮定する. 有理数は四則で閉じているので,  $4 - 3x = \sqrt{5}$  も有理数となる. これは  $\sqrt{5}$  が無理数であることに矛盾. よって  $\frac{4-\sqrt{5}}{3}$  は無理数である.  $\square$

## 5.2 問題編

問題 5.1.  $p$  を素数とする.  $k = 1, 2, \dots, p-1$  に対して  $p \mid \binom{p}{k}$  を示せ. ただし,  $\binom{p}{k}$  は 2 項係数. また,  $p$  が合成数のときこれは成り立つか答えよ.  
(ヒント: 講義プリントの命題 4.2 を使う.)

問題 5.2.  $d$  を平方数でない自然数とすると, その平方根  $\sqrt{d}$  は無理数であることを示せ. ただし, 平方数とは整数の 2 乗として表される数のことである.

問題 5.3. (チャレンジ問題)  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$  は無理数であることを示せ.

問題 5.4. 自然数  $n$  に対して,  $n$  のすべての (正の) 約数の和を  $S(n)$  と書く. 例えば,  $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$  となる. 次の問いに答えよ.

(1)  $p$  が素数,  $e \geq 0$  のとき,  $S(p^e) = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$  となることを示せ.

(2) 自然数  $m$  と  $n$  が互いに素, つまり  $\gcd(m, n) = 1$  のとき,  $S(mn) = S(m)S(n)$  が成り立つことを示せ.

(ヒント: 問題 4.4(2) を使う.)

問題 5.5. 自然数  $n$  に対して,  $n$  のすべての (正の) 約数の個数を  $T(n)$  とする. 例えば,  $T(6) = 4$  となる.  $T(n)$  が奇数であるための  $n$  に関する必要十分条件を求めよ.

問題 5.6. (チャレンジ問題) 整数  $p, p+2, p+4$  が 3 つとも素数になるのは  $p=3$  の場合だけであることを示せ. また,  $p, p+2, p+6$  が 3 つとも素数になるような  $p$  を 2 つ以上挙げよ.

(ヒント:  $p, p+2, p+4$  を 3 で割ったときの余りに注意.)

問題 5.7. 自然数  $n$  に対して,  $n$  番目の素数を  $p_n$  と表す (つまり,  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ ). 次の問いに答えよ.<sup>2</sup>

(1) 自然数

$$11! + 2, 11! + 3, \dots, 11! + 11$$

はすべて合成数であることを示せ.

(2) 不等式

$$p_{n+1} - p_n \geq 10$$

をみたす自然数  $n$  が存在することを示せ.

(ヒント:  $11! + 2 > p_n$  をみたす最大の番号  $n$  を取れ.)

(3) 自然数  $N$  が与えられたとき, この  $N$  に対して不等式

$$p_{n+1} - p_n \geq N$$

をみたす自然数  $n$  が存在することを示せ.

---

<sup>2</sup>問題 5.7 から, 素数が「あまり密に (ミッチリ) 分布していない」ことがわかる. 一方で, 例えば素数の逆数和が発散することや, 素数定理が示すようにその分布は「それほど疎 (スカスカ) ではない」ことも知られている.

問題 5.8. (Fibonacci 数列) 漸化式

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

により数列  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  を定める. これは Fibonacci 数列と呼ばれている.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$f_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...

(1) 加法公式

$$f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}, \quad m \geq 0, n \geq 1$$

が成り立つことを示せ.

(ヒント:  $m \geq 0$  を固定して  $n$  に関する帰納法 (induction) を使う.)

(2)  $m, n \geq 1$  のとき,  $f_n \mid f_{mn}$  が成り立つことを示せ.

(ヒント:  $n \geq 1$  を固定して, 小問 (1) を使って  $m$  に関する帰納法で示す.)

(3)  $n \geq 1, n \neq 4$  とする. このとき,  $f_n$  が素数ならば  $n$  は素数である. 小問 (2) を使って証明せよ.

(ヒント: 対偶を示す.)

注意 5.1. Fibonacci 数列は多くの性質をもつことが知られている<sup>3</sup>. 例えば,

- $m \geq n \geq 3$  のとき,  $f_n \mid f_m \implies n \mid m$ . (小問 (2) の逆.)
- $m, n \geq 1$  のとき,  $\gcd(f_m, f_n) = f_d$ . ここで  $d := \gcd(m, n)$ .

□

---

<sup>3</sup>例えば次を参照せよ:

小林昭七, 「なっとくする オイラーとフェルマー」, 第 2.2 節, 講談社, 2003.