第 0 章　お楽しみはこれからだ

0.1　集合の記法

いくつかのものをひとまとめにして考えた “ものの集まり” を**集合**という．集合はふつう大文字で表される．集合 A の中に入っている個々の ‘もの’ を，A の**元** (または**要素**) という．a が A の元であることを

$$a \in A$$

で表す．また，$a \in A$ でないことを $a \notin A$ で表す．集合 A と ‘もの’ a が与えられたとき，$a \in A$ であるかそうでないかがはっきりと定まっていなければならない．$a \in A$ でありかつ $a \notin A$ であったり，どちらも成り立たないというようなことはない．必ず，$a \in A$, $a \notin A$ のどちらか一方が成り立つ．

集合 A はその元により定まるが，元が $a, b, c, \cdots$ のようにはっきりと明示できるとき，

$$A = \{a, b, c, \cdots\}$$

のように書く．たとえば，4つの自然数 $2, 3, 6, 11$ のみを元とする集合（これを $2, 3, 6, 11$ からなる集合という）は

$$\{2, 3, 6, 11\}$$

である．元の順序は無視され，また重ねて表示することも禁止されないから，

$$\{2, 3, 6, 11\} = \{3, 11, 2, 6\} = \{2, 3, 2, 11, 11, 6, 11, 2\}$$

である．自然数全体，整数全体の集合 $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{Z}$ は，

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}, \quad \boldsymbol{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

と書ける．ここで，‘$\cdots$’ で表された部分が容易に推察できることが前提となっていることに注意すべきである．たとえば，

$$A = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7, \cdots\}$$

において，A は正の偶数全体の集合であることが推察できるが，B の ‘$\cdots$’ が何を意味するかは少し曖昧である．整数論が話題になっているならば，B は素数全体の集合と解釈できるかもしれないが，それとは全く別に，数列 $b_n = (-n^3 + 9n^2 - 14n + 18)/6$ の作る

2012 年度「代数入門」講義資料（2012 年 9 月）ver.0927

集合とみることもできる． 実際，$\{b_n\}$ を順に計算してみると，2, 3, 5, 7, 8, 7, 3, -5, -18, $\cdots$ となっている． このように '$\cdots$' を含む記法は曖昧さを含んでいる． したがって，'$\cdots$' の意味するところが文脈からはっきりと定まる場合にのみ使われるべきである．なお，元をひとつももたない集合も考え，それを ϕ で表し**空集合**という． 空集合は $\{\ \}$ と表すこともできる．

$$\phi = \{\ \}.$$

いずれにしろ，$\{a, b, c, \cdots\}$ の形の記法は，集合の元をすべて書き上げている（あるいはその代表的な元を提示することで残りの元すべてを '$\cdots$' によって類推できる）という点で，きわめてわかりやすい． しかし，すべての元をもらさずに書き並べることができない集合（たとえば，無理数全体の集合）については，曖昧さを含まずに表記するために別の記法を与える必要がある． そのために，'もの' についての性質というものを考える． たとえば，'x は無理数である' とか 'x は平方数でない自然数である' などは，'もの' x についての性質である． このような性質のひとつ $P(x)$ を考え，$P(x)$ が成り立つような x 全体の集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

と書く． たとえば，

$$\{x \mid x \text{ は 1 より大きく 7 以下の奇数である }\}$$

は $\{3, 5, 7\}$ と等しい．

$$\{x \mid x \text{ は 1 より大きく 7 以下の無理数である }\}$$

はすべての元を書き上げることはできないが，確かにひとつの集合を定める． また，有理数全体，実数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{Q} = \{x \mid x \text{ は有理数 }\}, \quad \boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{ は実数 }\}$$

で与えることができるが，もちろんこれは '良い' 表し方とはいえない．

$$\boldsymbol{Q} = \{x \mid x \text{ は整数の商 }\}, \quad \boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{ はコーシー列である有理数列の極限値 }\}$$

とすればより正確になる． $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ の厳密な定義については別の機会に論ずることにする．

さて，このような記法では，あらかじめ 'もの' x の動く範囲を定めておいて，その範囲の中で性質 $P(x)$ が成り立つものを集めるようにすれば，曖昧さが少なくかつ簡便に記述できる． たとえば，上にあげた '1 より大きく 7 以下の無理数' 全体の集合は

$$\{x \mid x \in \boldsymbol{R} \text{ かつ } x \text{ は 1 より大きく 7 以下の無理数 }\}$$

とすれば，より正確である． これをしばしば

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \text{ は 1 より大きく 7 以下の無理数 }\}$$

と略記する． 無理数である実数全体の集合は $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \notin \boldsymbol{Q}\}$ と書くことができる．

‘もの’ x がある範囲を動くとき，x の式によって表現されるもの全体の集合を考えたいときがある．たとえば，x が $\boldsymbol{Z}$ の中を動くときに，式 $2x$ で表されるもの全体が偶数全体の集合を与える．性質 $P(x)$ をみたすような ‘もの’ x 全体について，x の式 $f(x)$ で表される ‘もの’ 全体の集合を

$$\{f(x) \mid P(x)\}$$

で表す．たとえば

$$\{2x \mid x \in \boldsymbol{Z}\}, \quad \{2y+1 \mid y \in \boldsymbol{Z}\}, \quad \left\{n^2 \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

はそれぞれ偶数全体，奇数全体、平方数全体の集合である．この記法を使えば，

$$\boldsymbol{Z} = \{a-b \mid a,b \in \boldsymbol{N}\}, \quad \boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \boldsymbol{Z} \text{ かつ } b \in \boldsymbol{N}\right\}$$

と書け，さらに実数全体，複素数全体の集合も

$$\boldsymbol{R} = \left\{\lim_{n\to\infty} a_n \;\middle|\; \{a_n\} \text{ はコーシー列である有理数列}\right\}, \quad \boldsymbol{C} = \{a+bi \mid a,b \in \boldsymbol{R}\}$$

と書くことができる．ただし i は虚数単位である．

0.2　集合の演算

【包含関係】　ふたつの集合 A，B はその属する元がまったく同じであるとき等しい，すなわち $A=B$ となる．A が B に含まれるとき，A は B の**部分集合**であるといい

$$A \subset B$$

で表す．正確には，$A \subset B$ とは，A に属する元がすべて B に属することである．

$$A \subset B \iff \text{「}x \in A \text{ ならば } x \in B\text{」}.$$

$A=B$ とは，どんな ‘もの’ x に対しても $x \in A$ と $x \in B$ が同値となることだから，

$$A = B \iff \text{「}A \subset B \text{ かつ } B \subset A\text{」}$$

が成り立つ (むしろ，これを $A=B$ の定義とすべきである).

一般に，命題（性質） P, Q について，

$$P \text{ ならば } Q$$

であることと

$$P \text{ でないかまたは } Q$$

であることは同じことである．たとえば,「代数入門の単位を取れば進級できる」ということと,「代数入門の単位が取れないか，または進級できる」ということとはまったく同じで

ある．いま，空集合 ϕ はひとつも元をもたないから，どんな x についても $x \notin \phi$ である．よって，任意の集合 A について ($x \in A$ か $x \notin A$ にかかわらず)

$$x \in \phi \text{ でないかまたは } x \in A$$

が成り立っている．したがって，上に述べたとおり

$$x \in \phi \text{ ならば } x \in A$$

であり，これは

$$\phi \subset A$$

を意味する．すなわち，どんな集合も空集合を部分集合としてもつことがわかる．

【和集合・共通部分・差集合】　集合 A, B のそれぞれの元をすべて寄せ集めて得られる集合を A, B の**和集合**といい，$A \cup B$ で表す．正確な定義は以下の通り;

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

一方，A, B の両方共に属する元全体の集合を A, B の**共通部分** (または**積集合**) といい，$A \cap B$ で表す．

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

３つ以上の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対しても

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \text{ある } 1 \leq i \leq n \text{ について } x \in A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \text{すべての } 1 \leq i \leq n \text{ に対して } x \in A_i\}$$

によって和集合，共通部分を定める．それぞれ，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

と書くこともできる．無限個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ に対してもまったく同様にして

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{ある } n \text{ について } x \in A_n\}$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{すべての } n \text{ に対して } x \in A_n\}$$

によって和集合，共通部分を定めることができる．

ふたつの集合 A, B に対して，A に属し B に属さない元全体の集合を A, B の**差集合**といい $A - B$ で表す．

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}.$$

さて，和集合，共通部分＝積集合，差集合を上で定義したが，和・積・差があるならば商があると思ってもおかしくはない．実際に**商集合**という概念があり，大学での数学を学ぶ上で大変重要なものとなっている．本講義ではとくに代数的構造から定まる商集合の理解がひとつの大きな目標となる．

さあ，お楽しみはこれからだ！