

代数II 試験問題 Jan. 21, 2026 (中野 伸)

注意: 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

[1] 以下の問に答えよ.

- (1) $\mathbb{Q}(1 + \sqrt[3]{2})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底を一組求めよ.
- (2) $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ を 5 個の元からなる有限体とすると, 剰余環 $\mathbb{F}_5[X]/(X^2 - a)$ が体になるような $a \in \mathbb{F}_5$ をすべて求めよ.
- (3) L/K を体の拡大とする. もし $[L : K] = 7$ ならば, すべての $\beta \in L$ に対して $\beta \in K(\beta^2)$ であることを示せ.

[2] $\alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) α の $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の最小多項式を求めよ.
- (2) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.
- (3) α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ.

[3] $\mathbb{Q}$ 上の 2 つの多項式 $f(X) = X^4 - 10X^2 + 1$ と $g(X) = X^4 - 5X^2 + 6$ を考える. K を $f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とし, L を $g(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とすると, 以下の問に答えよ.

- (1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ はどちらも K に属することを示せ.
- (2) $K = L$ を示せ.
- (3) $K/\mathbb{Q}$ の拡大次数を求めよ.
- (4) $K/\mathbb{Q}$ のガロア群を求めよ.