

## 代数II 試験問題 Jan. 22, 2025 (中野 伸)

注意: 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

[1] 以下の問に答えよ.

(1) 次のそれぞれの拡大次数を求めよ.

(あ)  $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[6]{256}\right): \mathbb{Q}\right]$       (い)  $\left[\mathbb{Q}\left(5 + \sqrt{5} + \sqrt[3]{5}\right): \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\right]$

(2)  $\mathbb{Q}$  上超越的である複素数  $\alpha$  に対して,  $\alpha - 7$  の  $\mathbb{Q}(\alpha^2)$  上の最小多項式を求めよ.

(3)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$  の  $\mathbb{Q}$  上の共役元をすべて求めよ.

(4)  $\mathbb{Q}$  上の無限次代数拡大の例をひとつあげよ.

[2]  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{35})$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{45})$ ,  $M = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{175})$  に対して, 以下の問に答えよ.

(1)  $K$  と  $L$  は等しいか等しくないか, 理由を添えて答えよ.

(2)  $K$  は  $M$  と等しいか等しくないか, 理由を添えて答えよ.

(3)  $K/\mathbb{Q}$  はガロア拡大であり, かつ巡回拡大でないことを証明せよ.

[3]  $\mathbb{F}_3$  を 3 個の元からなる有限体とし,  $\Omega$  をその代数的閉包とする.  $\mathbb{F}_3$  上の多項式  $f(X) = X^3 - X - 1$  について, 以下の問に答えよ.

(1)  $f(X)$  は  $\mathbb{F}_3$  上既約であることを示せ.

(2)  $f(X)$  の根  $\beta \in \Omega$  について,  $f(\beta + 1)$  を計算し,  $\beta + 1$  が  $\beta$  の  $\mathbb{F}_3$  上の共役元であることを確かめよ.

(3)  $\beta \in \Omega$  が  $f(X)$  の根ならば,  $\mathbb{F}_3(\beta)/\mathbb{F}_3$  はガロア拡大であることを示せ.