

代数II 試験問題 Jan. 22, 2025 (中野 伸)

注意: 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

[1] 以下の間に答えよ.

(1) 次のそれぞれの拡大次数を求めよ.

$$(a) \left[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{256}) : \mathbb{Q} \right] \quad (b) \left[\mathbb{Q}(5 + \sqrt{5} + \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \right]$$

(2) \mathbb{Q} 上超越的である複素数 α に対して, $\alpha - 7$ の $\mathbb{Q}(\alpha^2)$ 上の最小多項式を求めよ.

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ の \mathbb{Q} 上の共役元をすべて求めよ.

(4) \mathbb{Q} 上の無限次代数拡大の例をひとつあげよ.

[2] $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{35})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{45})$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{175})$ に対して, 以下の間に答えよ.

(1) K と L は等しいか等しくないか, 理由を添えて答えよ.

(2) K は M と等しいか等しくないか, 理由を添えて答えよ.

(3) K/\mathbb{Q} はガロア拡大であり, かつ巡回拡大でないことを証明せよ.

[3] \mathbb{F}_3 を 3 個の元からなる有限体とし, Ω をその代数的閉包とする. \mathbb{F}_3 上の多項式 $f(X) = X^3 - X - 1$ について, 以下の間に答えよ.

(1) $f(X)$ は \mathbb{F}_3 上既約であることを示せ.

(2) $f(X)$ の根 $\beta \in \Omega$ について, $f(\beta + 1)$ を計算し, $\beta + 1$ が β の \mathbb{F}_3 上の共役元であることを確かめよ.

(3) $\beta \in \Omega$ が $f(X)$ の根ならば, $\mathbb{F}_3(\beta)/\mathbb{F}_3$ はガロア拡大であることを示せ.