代数 II　試験問題 Jan. 24, 2024 (中野 伸)

注意: 答えだけでなく，答えに至る考え方等を書くこと.

[1] 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{Q}\bigl(\sqrt[3]{1653750}\bigr) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ をみたす最小の自然数 m を求めよ（素因数分解 $1653750 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$ を用いてもよい）.

(2) $\mathbb{Q}$ 上の無限次代数拡大体の例をひとつあげよ.

(3) $\mathbb{Q}\bigl(\sqrt{-n}\bigr)$ は $X^6 - 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体であるという. そのような最小の自然数 n を求めよ.

(4) L/K を体の拡大とし，L の元 x が $[K(x):K] = 7$ をみたすとする. このとき $[K(x^3):K]$ を求めよ.

[2] $\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{3}$，$F = \mathbb{Q}\bigl(\sqrt{2}\bigr)$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(2) 多項式環 $F[X]$ から体 $F(\alpha)$ への準同型写像

$$\varphi : F[X] \longrightarrow F(\alpha), \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

について，$\mathrm{Ker}(\varphi) = (f(X))$ をみたす $f(X) \in F[X]$ を求めよ.

(3) α の F 上の共役元をすべて求めよ.

[3] $\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1 = 0$ をみたす複素数 β を 1 つ選び，$\gamma = 1 - \dfrac{1}{\beta}$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $\gamma = s + t\beta + u\beta^2$ をみたす $s, t, u \in \mathbb{Q}$ を求めよ.

(2) $\gamma \in \mathrm{Conj}(\beta, \mathbb{Q})$ を示せ.

(3) $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ が正規拡大かどうか判定せよ.