代数 II　試験問題 Jan. 25, 2023 (中野 伸)

注意: 証明問題以外でも，答えだけでなく，答えに至る考え方等を書くこと.

[1]　以下の問に答えよ.

(1)　$\alpha \notin \mathbb{Q}(\alpha^4, \alpha^6)$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$ を 1 つ求めよ.

(2)　任意の $\beta \in \mathbb{C}$ に対して $\beta \in \mathbb{Q}(\beta^4, \beta^7)$ が成り立つことを示せ.

(3)　$X^3 + 8X^2 - 7$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-7}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{23}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{77}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$$

のうちどれか.

[2]　L/K を体の拡大とし $\alpha, \beta \in L$ とする．以下の命題を証明せよ.

(1)　$\alpha \in K(\alpha^2)$ ならば，α は K 上代数的である.

(2)　$\alpha + \beta$ が K 上超越的ならば，$K(\alpha, \beta)/K$ は無限次拡大である.

(3)　K の標数が 11 であるとき，

$$(\alpha + 10\beta)^{22} = \alpha^{22} + 9\alpha^{11}\beta^{11} + \beta^{22}$$

が成り立つ.

[3]　$\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{7} - 1}$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1)　α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(2)　α の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ.

(3)　$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ が正規拡大かどうか判定せよ.

[4]　$\mathbb{Q}$ 上の多項式 $f(X) = X^4 - 5X^2 + 5$ の根 α をひとつとり，$\beta = \alpha^3 - 3\alpha$ とおく．$f(X)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを認めた上で，以下の問に答えよ.

(1)　$\beta^2 = r\alpha^3 + s\alpha^2 + t\alpha + u$ をみたす有理数 r, s, t, u を求めよ.

(2)　β も $f(X)$ の根であることを確かめよ.

(3)　$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示せ.