

代数II 試験問題 Jan. 24, 2017 (中野 伸)

注意: 【答えのみ】と書いてあるものを除き, 答えに至る考え方も書くこと.
なお, π は円周率である.

- [1] 以下のそれぞれについて, 真偽を判定せよ.
- (1) $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6} + \sqrt{15})$ が成り立つ.
 - (2) $\pi \in \mathbb{Q}(\pi^2)$ が成り立つ.
 - (3) $2 + 2\sqrt{5}, 3 + 3\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の基底である.
 - (4) $\mathbb{Q}(\pi - \sqrt[3]{7})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ 上の代数拡大体である【答えのみ】.
 - (5) $\mathbb{Q}(\pi - \sqrt[3]{7})$ は $\mathbb{Q}(\pi)$ 上の代数拡大体である【答えのみ】.
 - (6) 有理数体 \mathbb{Q} 上の多項式環の剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - X + 1)$ は, 体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ と同型である.
 - (7) L/K が正規拡大で M がその中間体ならば, M/K はつねに正規拡大である【答えのみ】.
- [2] 複素数 α に対して $n(\alpha) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2 + \alpha^3)]$ とおく. 以下の問いに答えよ.
- (1) $\alpha = 1 + \sqrt{-5}$ のとき, $n(\alpha)$ を求めよ.
 - (2) α を $X^3 + X^2 + 1$ のひとつの根とするとき, $n(\alpha)$ を求めよ.
 - (3) 任意の複素数 α に対して $n(\alpha) \leq 3$ であることを示せ.
- [3] $\beta = \sqrt{3} - \sqrt{7}$ とおくととき, 以下の問いに答えよ.
- (1) β の \mathbb{Q} 上の最小多項式を求めよ【答えのみ】.
 - (2) β の $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ 上の最小多項式を求めよ【答えのみ】.
 - (3) β の $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ 上の共役元をすべて求めよ.
- [4] 体の拡大 L/K に対して以下の問いに答えよ.
- (1) L/K が有限次拡大ならば, L の任意の元は K 上代数的であることを示せ.
 - (2) 代数的無限次拡大 L/K の例をひとつあげて説明せよ.