

§10. ガロア拡大

定義 10.1 分離拡大かつ正規拡大である体の拡大を**ガロア拡大**という. L/K がガロア拡大のとき, $\text{Aut}(L/K)$ をとくに $\text{Gal}(L/K)$ と表し, L/K の**ガロア群**, または L の K 上のガロア群という.

定理 10.2 有限次拡大 L/K に対して, 次は同値である.

- (i) L/K はガロアである.
- (ii) L は K 上のある分離多項式の K 上の最小分解体である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 仮定 (i) より, とくに L/K は有限次分離拡大, よって定理 8.7 より, ある $\alpha \in L$ を用いて $L = K(\alpha)$ とかける. α は K 上分離的だからその最小多項式 $f(X) \in K[X]$ は分離多項式である. さらに L/K は正規だから $\text{Conj}(\alpha, K) \subset L$, したがって, $f(X)$ の K 上の最小分解体 $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ は L に等しい.

(ii) $\Rightarrow$ (i): L が K 上の分離多項式 $f(X)$ の K 上の最小分解体であるとする. このとき, 定理 9.6 より L/K は正規拡大である. 一方, $f(X)$ の根すべてを $\alpha_i (i = 1, \dots, r)$ とすれば, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ と表されるが, 各 α_i は K 上分離的なので, 命題 8.12 を繰り返し適用すれば, L/K が分離的であることが導かれる. $\square$

定理 10.3 L/K が有限次ガロア拡大ならば, $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K]$ が成り立つ.

証明 L/K は有限次分離拡大なので, 原始元定理 (定理 8.7) によって $L = K(\alpha)$ と表され, さらに定理 8.4 より, $|\text{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K]$ が成り立つ. 一方, $L = K(\alpha)$ は K 上正規でもあるので, 定理 9.7 より $|\text{Gal}(K(\alpha)/K)| = |\text{Conj}(\alpha, K)|$, したがって結論の等式を得る. $\square$

定義 10.4 L を体とし, Ω を L の拡大体とする. L から Ω への単射準同型写像の集合 H に対して,

$$L^H = \{x \in L \mid \text{任意の } \sigma \in H \text{ に対して } \sigma(x) = x\}$$

を H の (L における) **不変体**という (H の元が準同型写像であることを用いれば, 不変体 L^H は L の部分体であることが確かめられる).

以下, 多くの場合, H は代数拡大 L/K の自己同型群 $\text{Aut}(L/K)$ の部分群である. 次の補題は, 不変体の定義からすぐに示すことができる.

補題 10.5 L/K を体の拡大とする.

- (1) L/K の任意の中間体 M に対して, $M \subset L^{\text{Aut}(L/M)}$ が成り立つ.
- (2) $\text{Aut}(L/K)$ の任意の部分群 H に対して, $H \subset \text{Aut}(L/L^H)$ が成り立つ.

定理 10.6 代数拡大 L/K がガロアであるためには, $K = L^{\text{Aut}(L/K)}$ であることが必要十分である.

証明 必要性: $M = L^{\text{Aut}(L/K)}$ とおくと, 前補題 (1) から $K \subset M$ である. そこで, L/K がガロア, すなわち分離的かつ正規であることを仮定して, $M \subset K$ を導く. そのために $\alpha \in M$ を任意にとる. M の定義から, 任意の $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ に対して $\sigma(\alpha) = \alpha$ であるが, L/K は正規なので, 定理 9.1 の性質 (iii) を用いれば, $\text{Conj}(\alpha, K) = \{\alpha\}$ が得られる. さらに, α は K 上分離的だから, 定理 8.4 より

$$[K(\alpha) : K] = |\text{Conj}(\alpha, K)| = 1, \quad \therefore K(\alpha) = K$$

よって $\alpha \in K$ となるから, $M \subset K$ が導かれた.

十分性: $K = L^{\text{Aut}(L/K)}$ を仮定し, 任意の $\alpha \in L$ に対して,

$$(\spadesuit) \quad |\text{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K], \quad \text{Conj}(\alpha, K) \subset L$$

を確かめればよい. なぜなら, 前者の等式と定理 8.4 から L/K の分離性が, 後者の包含関係と定理 9.1 の性質 (iv) から L/K の正規性が導かれるからである. いま,

$$B_\alpha = \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(L/K) \}$$

とおけば, $B_\alpha \subset L$ であり, 系 6.12 より

$$(\heartsuit) \quad B_\alpha \subset \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K) \} = \text{Conj}(\alpha, K),$$

よって,

$$(\diamond) \quad |B_\alpha| \leq |\text{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ. とくに, B_α は有限集合であり, L 上の多項式

$$f_\alpha(X) = \prod_{\beta \in B_\alpha} (X - \beta)$$

を定義することができる. ここで, 任意の $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ に対して

$$f_\alpha^\sigma(X) = \prod_{\beta \in B_\alpha} (X - \sigma(\beta)) = \prod_{\gamma \in \sigma(B_\alpha)} (X - \gamma)$$

だが, $\text{Aut}(L/K)$ が群であることに注意すれば, $\sigma(B_\alpha) = B_\alpha$, よって $f_\alpha^\sigma(X) = f_\alpha(X)$ であることがわかる. すなわち $f_\alpha(X)$ の係数は $L^{\text{Aut}(L/K)} = K$ に属する; $f_\alpha(X) \in K[X]$. さらに $f_\alpha(\alpha) = 0$ であるから, 補題 3.5 より

$$[K(\alpha) : K] \leq \deg f_\alpha(X) = |B_\alpha|.$$

よって, $(\heartsuit)$ の包含関係と $(\diamond)$ の不等号はすべて等号に置き換えられ,

$$\text{Conj}(\alpha, K) = B_\alpha \subset L, \quad |\text{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K],$$

すなわち $(\spadesuit)$ が確かめられた. □

系 10.7 L/K をガロア拡大としそのガロア群を G とする. M を L/K の中間体とすると, L/M はガロア拡大でそのガロア群 $\text{Gal}(L/M)$ は G の部分群であり, さらに $L^{\text{Gal}(L/M)} = M$ が成り立つ.

証明 L/K の分離性から L/M が分離的であること (定理 8.11), また, L/K の正規性から L/M が正規拡大であること (定理 9.13) がわかるから, L/M はガロア拡大である. 後半は前定理から導かれる. $\square$

定理 10.8 L/K を有限次ガロア拡大としそのガロア群を G とする. H を $\text{Gal}(L/K)$ の部分群とすると, L^H は L/K の中間体, したがって L/L^H はガロア拡大であり, さらに $\text{Gal}(L/L^H) = H$ が成り立つ.

証明 $M = L^H$ とおく. L/M がガロア拡大であることは, 系 10.7 で示されている. 補題 10.5 (2) より $H \subset \text{Gal}(L/M)$ であり, このことと定理 10.3 を用いて

$$|H| \leq |\text{Gal}(L/M)| = |\text{Aut}(L/M)| = [L : M].$$

一方, 原始元定理 (定理 8.7) より $L = M(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ がとれる. そこで, L 上の多項式

$$g_\alpha(X) = \prod_{\sigma \in H} (X - \sigma(\alpha))$$

を考えると, H が群であることから, 任意の $\sigma \in H$ に対して $g_\alpha^\sigma(X) = g_\alpha(X)$ であり, $g_\alpha(X)$ の係数は $L^H = M$ に属することがわかる; $g_\alpha(X) \in M[X]$. さらに $g_\alpha(\alpha) = 0$ なので

$$[L : M] \leq \deg g_\alpha(X) = |H|.$$

したがって, 上の不等式と合わせて $|H| = |\text{Gal}(L/M)|$ であり, よって $H = \text{Gal}(L/M)$ を得る. $\square$

定理 10.9 (ガロア理論の基本定理) 有限次ガロア拡大 L/K に対して, そのガロア群を G とする. $\mathcal{M}_{L/K}$ を L/K の中間体全体の集合, $\mathcal{H}_G$ を G の部分群全体の集合とする;

$$\mathcal{M}_{L/K} = \{M \mid M \text{ は } L/K \text{ の中間体}\}, \quad \mathcal{H}_G = \{H \mid H \text{ は } G \text{ の部分群}\}.$$

このとき, 二つの写像

$$\mathcal{M}_{L/K} \longrightarrow \mathcal{H}_G, \quad M \mapsto \text{Gal}(L/M)$$

$$\mathcal{H}_G \longrightarrow \mathcal{M}_{L/K}, \quad H \mapsto L^H$$

は互いに逆の全単射である.

証明 写像に名前を付けて, $\Phi: \mathcal{M}_{L/K} \rightarrow \mathcal{H}_G$ および $\Psi: \mathcal{H}_G \rightarrow \mathcal{M}_{L/K}$ とする. このとき, 任意の $M \in \mathcal{M}_{L/K}$, $H \in \mathcal{H}_G$ に対して

$$\Psi(\Phi(M)) = M, \quad \Phi(\Psi(H)) = H$$

を示せばよいが, これらはそれぞれ

$$L^{\text{Gal}(L/M)} = M, \quad \text{Gal}(L/L^H) = H$$

のことであり, 系 10.7, 定理 10.8 ですでに示されている. $\square$

定義 10.10 有限次ガロア拡大 L/K に対してそのガロア群を G とする;

$$G = \text{Gal}(L/K).$$

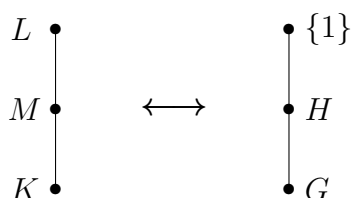
L/K の中間体 M と G の部分群 H の間に,

$$H = \text{Gal}(L/M)$$

あるいは, これと同値な

$$M = L^H$$

の関係があるとき, M と H は互いに対応するという. この対応を**ガロア対応**という. とくに K は G に対応し, L は $\text{id}_L (= L \text{ 上の恒等写像})$ だけを元にもつ群 (単位群) に対応する. 今後, 単位群を簡単に $\{1\}$ と略記することにする.



定義 10.11 L/K をガロア拡大, そのガロア群を G とする.

- (1) G が巡回群のとき, L/K を**巡回拡大**という.
- (2) G がアーベル群のとき, L/K を**アーベル拡大**という.
- (3) G が可解群のとき, L/K を**可解拡大**という.

例 10.12 (1) 素数次ガロア拡大は巡回拡大である. なぜなら, 素数位数の有限群は巡回群だから.

(2) 次数 5 以下のガロア拡大はアーベル拡大である. なぜなら, 位数が 5 以下の有限群はすべてアーベル群だから.

(3) 次数 60 未満のガロア拡大は可解拡大である. なぜなら, 位数が 60 未満の有限群はすべて可解群だから.