

## §6. 代数的閉体と共役元

**定義 6.1** 体  $L$  の代数拡大体が  $L$  のみであるとき,  $L$  を**代数的閉体**という.

つまり,  $L$  が代数的閉体であるとは,  $L$  のどんな拡大体  $M$  をとっても, 『 $\alpha \in M$  が  $L$  上代数的ならば  $\alpha \in L$ 』 となることである.

**例 6.2** (1)  $\mathbb{C}$  は代数的閉体である (代数学の基本定理).  
(2)  $\mathbb{R}$  は代数的閉体ではない.

**定理 6.3** 体  $L$  に対して次は同値である.

- (i)  $L$  は代数的閉体である.
- (ii)  $L$  上の 2 次以上の任意の多項式は  $L$  上可約である.
- (iii)  $L$  上の定数でない任意の多項式は  $L$  上の 1 次式の積として表される.
- (iv)  $L$  上の定数でない任意の多項式は  $L$  で根をもつ.

**証明** (i) $\Rightarrow$ (ii):  $L$  上の既約多項式  $f(X)$  が, 仮定 (i) の下で 1 次であることを確かめればよい. クロネッカーの定理 (定理 5.6) より,  $L$  の拡大体  $M$  と  $\alpha \in M$  で  $f(\alpha) = 0$  をみたすものがとれるが, 仮定 (i) より  $\alpha \in L$  であるから,  $\deg f = [L(\alpha) : L] = 1$  を得る.  
(ii) $\Rightarrow$ (iii): 一般に体上の多項式環は UFD である. とくに,  $L$  上の定数でない任意の多項式は,  $L$  上の既約多項式の積として表されるから, 仮定 (ii) より (iii) が導かれる.  
(iii) $\Rightarrow$ (iv): あきらか.  
(iv) $\Rightarrow$ (i):  $M/L$  を代数拡大とすると, 任意の  $\alpha \in M$  に対して,  $\alpha \in L$  であることを確かめればよい. いま,  $\alpha$  の  $L$  上の最小多項式を  $f(X)$  とすると, 仮定 (iv) より,  $f(X)$  は根  $\beta \in L$  をもつ. 一方, 定理 5.10 より  $L(\alpha)$  と  $L(\beta)$  は  $L$  上同型であり, とくに  $L$  上の次数は等しいから  $[L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L] = 1$ , ゆえに  $L(\alpha) = L$ , すなわち  $\alpha \in L$  でなければならない.  $\square$

**定義 6.4** 体  $K$  の代数拡大体であって代数的閉体であるものを  $K$  の**代数的閉包**という.

**定理 6.5**  $\Omega$  が代数的閉体ならば,  $\Omega$  に含まれる任意の部分体に対して, その代数的閉包が  $\Omega$  の中に一意的存在する.

**証明** (存在すること)  $K$  を  $\Omega$  の任意の部分体とする.  $K$  上代数的な  $\Omega$  の元全体

$$L = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha \text{ は } K \text{ 上代数的}\}$$

は, 定理 4.7 または系 4.8 を用いれば,  $K$  上の代数拡大体であることがわかる. そこで, 以下,  $L$  が代数的閉体であることを示す.  $f(X)$  を  $L$  上の定数でない任意の多項式とする.  $f(X)$  は  $\Omega$  上の多項式でもあるが,  $\Omega$  が代数的閉体であるという仮定から, 定理 6.3 (iv) を用いれば,  $f(\alpha) = 0$  である  $\alpha \in \Omega$  がとれる. また,  $f(\alpha) = 0$  より  $\alpha$  は  $L$  上代数的であるが,  $L/K$  が代数拡大であることに注意すれば, 定理 4.4 より  $\alpha$  は  $K$  上代数的, よって,  $L$  の定義から  $\alpha \in L$  である. そこで, 再び定理 6.3 (iv) を用いて,  $L$  が代数的閉体であることが導かれる.

(一意性)  $\Omega$  の部分体  $L_1, L_2$  がどちらも  $K$  上の代数的閉包であるとする. 任意の  $\alpha \in L_1$  に対して,  $\alpha$  は  $K$  上代数的だから, もちろん  $L_2$  上も代数的だが,  $L_2$  は代数的閉体なので  $\alpha \in L_2$ . したがって  $L_1 \subset L_2$ . 役割を入れ替えれば  $L_2 \subset L_1$  も導かれ,  $L_1 = L_2$  が得られた.  $\square$

**例 6.6** (1)  $C$  は  $R$  の代数的閉包である.

(2)  $Q$  の代数的閉包は  $C$  の中で一意的に定まるが, それは  $C$  ではない.

(3)  $L$  が  $K$  の代数的閉包ならば,  $L/K$  の任意の中間体  $M$  は  $K$  上の代数拡大体であり, さらに  $L$  は  $M$  の代数的閉包でもある.

**定理 6.7 (シュタイニッツ)** 任意の体  $K$  に対してその代数的閉包が存在する. さらに,  $L_1, L_2$  がどちらも体  $K$  の代数的閉包ならば,  $K$  上の同型写像  $L_1 \rightarrow L_2$  が存在する.

**証明 (方針のみ)**  $K$  上の代数拡大体全体  $\mathcal{A}$  は, 包含関係を順序とする順序集合  $(\mathcal{A}, \subset)$  となっている. このとき,  $(\mathcal{A}, \subset)$  は帰納的である. 実際,  $\mathcal{S}$  を  $\mathcal{A}$  の全順序部分集合とすると,  $M_0 = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} M$  はあきらかに  $\mathcal{A}$  に属し  $\mathcal{S}$  の上限となっている. したがって, **ツォルンの補題**により  $\mathcal{A}$  は極大元  $L$  をもつ.  $L/K$  は代数拡大だから, もし  $E/L$  が代数拡大ならば, 定理 4.4 より,  $E/K$  も代数拡大, よって  $E \in \mathcal{A}$  となるから  $L$  の極大性より  $E = L$  でなければならない. このことは  $L$  が代数的閉体であることを示している. したがって,  $L$  は  $K$  上の代数的閉包である. 後半 (同型写像の存在) もツォルンの補題を用いて証明できるが, ここでは省略する. (じつは,  $\mathcal{A}$  が集合として定義されるかどうか疑わしいという意味で, この証明は不完全である. 単に “ $K$  上の代数拡大体全体” というだけではなく, 何らかの集合論的な制約を加えて  $\mathcal{A}$  を定義しなおす必要がある.)  $\square$

以下において, 体  $K$  に対して, 代数的閉包をひとつ固定し  $\overline{K}$  で表す.

$K$  上の任意の代数拡大体は  $\overline{K}/K$  の中間体と  $K$  上同型になる. なぜなら,  $M/K$  を任意の代数拡大とすると,  $M$  の代数的閉包  $L$  は  $K$  の代数的閉包でもあるから,

前定理より,  $K$  上の同型写像  $L \rightarrow \bar{K}$  が存在し, それによる  $M$  の像は  $\bar{K}/K$  の中間体となるからである.

そこで, とくに断らない限り以下では  $K$  上の代数拡大体は  $\bar{K}/K$  の中間体であり, また  $K$  上代数的な元も  $\bar{K}$  に属しているものとする.

**定義 6.8** 体の拡大  $L/K$  に対して,  $L$  から  $L$  への  $K$  上の同型写像を,  $L$  の  $K$  上の**自己同型写像**, または  $L/K$  の自己同型写像という. それら全体の集合は, 写像の合成に関して群になっている. それを  $\text{Aut}(L/K)$  で表し,  $L$  の  $K$  上の**自己同型群**, または  $L/K$  の自己同型群という;

$$\text{Aut}(L/K) = \{ \sigma \mid \sigma : L \rightarrow L, \quad K \text{ 上の同型写像} \}.$$

$\sigma, \tau \in \text{Aut}(L/K)$  の合成  $\sigma \circ \tau$  を, 積のように  $\sigma\tau$  で表す.

**定理 6.9**  $L$  が  $\bar{K}/K$  の中間体で,

$$\tau : L \longrightarrow \bar{K}$$

が  $K$  上の準同型写像であるとする. このとき,  $\tau$  の延長  $\sigma \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$  が存在する. すなわち,  $K$  上の同型写像

$$\sigma : \bar{K} \longrightarrow \bar{K}$$

で, 任意の  $a \in L$  に対して  $\sigma(a) = \tau(a)$  であるものがとれる.

この証明も, ふつう**ツォルンの補題**を使って行われる. 少し面倒なので省略する.

**定義 6.10**  $K$  を体とする.  $\alpha, \beta \in \bar{K}$  それぞれの  $K$  上の最小多項式が一致するとき,  $\alpha, \beta$  は  $K$  上**共役**であるという. また,  $\beta$  を  $\alpha$  の  $K$  上の**共役元**ともいう.  $\alpha$  の  $K$  上の共役元全体の集合を  $\text{Conj}(\alpha, K)$  で表す. 言い換えると,  $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式の ( $\bar{K}$  における) 根全体の集合が  $\text{Conj}(\alpha, K)$  である.

**定理 6.11** 体  $K$  と  $\alpha, \beta \in \bar{K}$  に対して次は同値である.

- (i)  $\alpha, \beta$  は  $K$  上共役である.
- (ii)  $\sigma(\alpha) = \beta$  をみたす  $\sigma \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$  が存在する.

**証明** (i)  $\Rightarrow$  (ii): (i) を仮定すると, 定理 5.10 より,  $K$  上の同型写像

$$\tau : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta) \subset \bar{K}$$

で  $\tau(\alpha) = \beta$  であるものが存在する. そこで, 定理 6.9 を適用すれば (ii) が得られる.

(ii)  $\Rightarrow$  (i):  $f(X)$  を  $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式とすれば, (ii) のような  $\sigma \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$  に対して,

$$f(\beta) = f(\sigma(\alpha)) = \sigma(f(\alpha)) = 0.$$

これは,  $f(X)$  が  $\beta$  の  $K$  上の最小多項式でもあることを示しているから, (i) を得る.  $\square$

**系 6.12** 体  $K$  と  $\alpha \in \overline{K}$  に対して,

$$\text{Conj}(\alpha, K) = \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K) \}$$

が成り立つ.

**例 6.13**  $z \in \mathbf{C}$  の複素共役  $\bar{z}$  は,  $z$  の  $\mathbf{R}$  上の共役元であり,  $\text{Conj}(z, \mathbf{R}) = \{z, \bar{z}\}$ , さらに  $\text{Aut}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$  は複素共役写像を生成元とする位数 2 の巡回群である.

**定理 6.14** 体  $K$  と  $\alpha \in \overline{K}$  に対して,

$$|\text{Aut}(K(\alpha)/K)| \leq |\text{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ.

**証明**  $\sigma \in \text{Aut}(K(\alpha)/K)$  に対して  $\sigma(\alpha) \in \text{Conj}(\alpha, K)$  を対応させることにより, 単射

$$\text{Aut}(K(\alpha)/K) \longrightarrow \text{Conj}(\alpha, K)$$

が定まり, 前半の不等式が導かれる. 次に,  $f(X)$  を  $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式とすると,

$$|\text{Conj}(\alpha, K)| = “f(X) の根の個数” \leq \deg f = [K(\alpha) : K]$$

を得る. □

**注意** “ $f(X)$  の根の個数”  $\leq \deg f$  としたのは,  $f(X)$  が重根をもつ可能性があるからである. 重根をもたない場合, 根の個数は次数と一致する.

**例 6.15**  $\sqrt{2}$  の  $\mathbf{Q}$  上の最小多項式は  $X^2 - 2$ , したがって

$$\text{Conj}(\sqrt{2}, \mathbf{Q}) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}.$$

また,  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q})$  とすると,  $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ . 符号のとり方により,  $\sigma = \text{id}$  (恒等写像) または  $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$  となるから, 後者をあらためて  $\sigma$  と定めれば,

$$\text{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}) = \{ \text{id}, \sigma \}$$

となる. よって, 定理 6.14 の不等式はすべて等号になっている.

**例 6.16**  $X^3 - 2$  の実根  $\alpha = \sqrt[3]{2}$  と他の根  $\alpha\omega, \alpha\omega^2$  について,

$$\text{Conj}(\alpha, \mathbf{Q}) = \{ \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2 \}.$$

一方, 同型写像  $\mathbf{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha)$  によって  $\alpha$  は  $\alpha$  にしか写らないから

$$\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}) = \{ \text{id} \}.$$

よって, この場合は定理 6.14 の左の不等号は  $1 < 3$  となっていて, 等号ではない.