

§1. 2次, 3次, 4次方程式の解の公式

定理 1.1 2次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は, $b^2 - 4c$ の平方根をひとつ固定し, それを R とするとき,

$$\frac{-b+R}{2}, \quad \frac{-b-R}{2}$$

で与えられる.

証明 解を α, β とすれば, 解と係数の関係から, $\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = c$. よって,

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$$

そこで, この平方根のひとつを R とし, α, β に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha - \beta = R \end{cases}$$

を解けば,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -b \\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b+R \\ -b-R \end{pmatrix}$$

を得る. □

定理 1.2 3次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は, Y に関する2次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の2解それぞれの3乗根 R, S を, $RS = b^2 - 3c$ を満たすように一組固定するとき,

$$\frac{-b+R+S}{3}, \quad \frac{-b+\omega^2 R + \omega S}{3}, \quad \frac{-b+\omega R + \omega^2 S}{3}$$

で与えられる. ここで, ω は1の原始3乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

である.

証明 3つの解を α, β, γ とし,

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma, \\ R &= \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \\ S &= \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \end{aligned}$$

とおく. これらを α, β, γ の連立方程式と考え, 係数行列を M とする. ここで

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega^2 - 3\omega = 3\omega(\omega - 1) \neq 0$$

より, M は正則である. よって, Q, R, S が求まれば, M の逆行列を実際に計算することにより

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ R \\ S \end{pmatrix}$$

から α, β, γ が得られる. さて, 解と係数の関係から $Q = -b$ だが,

$$R^3 + S^3 = -2b^3 + 9bc - 27d, \quad RS = b^2 - 3c$$

も, ちょっとがんばればわかる. したがって, R^3, S^3 は定理にある Y に関する2次方程式の解である. R, S は, これらの3乗根として求まり, 定理の主張が導かれる. $\square$

定理 1.3 4次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は, Y に関する3次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (b^3 - 4bc + 8d)^2 = 0$$

の3解それぞれの平方根 R, S, T を, $RST = -b^3 + 4bc - 8d$ を満たすように一組固定するとき,

$$\frac{-b + R + S + T}{4}, \quad \frac{-b + R - S - T}{4}, \quad \frac{-b - R + S - T}{4}, \quad \frac{-b - R - S + T}{4}$$

で与えられる.

証明 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を4つの解として

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ R &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ S &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ T &= \alpha - \beta - \gamma + \delta \end{aligned}$$

とおく. Q, R, S, T が求まれば, 上の式を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関する連立方程式とみなして解けばよい. 解と係数の関係から $Q = -b$ だが,

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 + T^2 &= 3b^2 - 8c, \\ R^2S^2 + S^2T^2 + T^2R^2 &= 3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e, \\ RST &= -b^3 + 4bc - 8d \end{aligned}$$

も, うんとかんばって計算すれば得られる. したがって, R^2, S^2, T^2 は定理にある Y に関する 3 次方程式の解である. R, S, T は, これらの平方根として求まり, 定理の主張が導かれる. $\square$

定義 1.4 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ は, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つとき, **対称式**であるという (正確には $x_1, \dots, x_n$ の対称式という).

定義 1.5 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して,

$$(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}X + (-1)^ns_n$$

によって定まる $s_1, \dots, s_n$ を, $x_1, \dots, x_n$ の**基本対称式**という. とくに, s_j を j 次の基本対称式という.

例 1.6 基本対称式は対称式である.

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ のとき} & \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1x_2 \end{cases} \\ n = 3 \text{ のとき} & \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases} \\ n = 4 \text{ のとき} & \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ s_4 = x_1x_2x_3x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

例 1.7 x_1, x_2, x_3 の対称式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

は, 上に定めた $n = 3$ のときの基本対称式 s_1, s_2, s_3 によって

$$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 - 3s_2$$

と表すことができる.

定理 1.8 (対称式の基本定理) $x_1, \dots, x_n$ の任意の対称式 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対して, ある n 変数多項式 $G(X_1, \dots, X_n)$ が存在して,

$$f(x_1, \dots, x_n) = G(s_1, \dots, s_n)$$

が成り立つ. すなわち, 任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる.

例 1.9 証明は, 難しいことは使わないが煩雑なので省略する. 以下に例を挙げて証明の代わりとする.

(1) $f(x, y) = x^4 + y^4$ を x, y の基本対称式

$$s = x + y, \quad t = xy$$

の多項式として表す.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 \\ f(x, y) - s^4 &= -4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 \\ f(x, y) - s^4 + 4s^2t &= 2x^2y^2 \\ f(x, y) - s^4 + 4s^2t - 2t^2 &= 0 \end{aligned}$$

よって, $f(x, y) = s^4 - 4s^2t + 2t^2$.

(2) $g(x, y, z) = x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$ を x, y, z の基本対称式

$$s = x + y + z, \quad t = xy + yz + zx, \quad u = xyz$$

の多項式で表す.

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + z^3y \\ g(x, y, z) - s^2t &= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2y^2z^2 \\ g(x, y, z) - s^2t + 2t^2 &= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 \\ g(x, y, z) - s^2t + 2t^2 + su &= 0 \\ \text{ゆえに, } g(x, y, z) &= s^2t - 2t^2 - su. \end{aligned}$$