

§9. 正規拡大

定理 9.1 代数拡大 L/K について、次は同値である.

- (i) すべての $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) \subset L$.
- (ii) すべての $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) = L$.
- (iii) すべての $\alpha \in L$ に対して $\text{Conj}(\alpha, K) = \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(L/K) \}$.
- (iv) すべての $\alpha \in L$ に対して $\text{Conj}(\alpha, K) \subset L$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ ならば, $\sigma^{-1} \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ でもあるから, $\sigma^{-1}(L) \subset L$ が (i) より得られ, $L = \sigma(\sigma^{-1}(L)) \subset \sigma(L)$. よって (ii) が導かれた.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\alpha \in L$ とし, その K 上の最小多項式を $f(X)$ とする. 任意の $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ に対して, $f(\sigma(\alpha)) = \sigma(f(\alpha)) = \sigma(0) = 0$ より, $\sigma(\alpha) \in \text{Conj}(\alpha, K)$,

$$\therefore \{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(L/K) \} \subset \text{Conj}(\alpha, K).$$

逆の包含関係を示すために, $\beta \in \text{Conj}(\alpha, K)$ とすると, 定理 6.11 (または系 6.12) から, $\beta = \tau(\alpha)$ をみたす $\tau \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ がとれる. このとき (ii) より $\tau(L) = L$ なので, $\sigma = \tau|_L$ とおけば, $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ であって, かつ $\beta = \tau(\alpha) = \sigma(\alpha)$ であるから, 逆の包含関係が示された.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\alpha \in L$ ならば $\{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Aut}(L/K) \} \subset L$, よって (iii) より (iv) を得る.

(iv) $\Rightarrow$ (i): $\alpha \in L$ とすると, 系 6.12 より, $\sigma \in \text{Aut}(\overline{K}/K)$ のとき $\sigma(\alpha) \in \text{Conj}(\alpha, K)$. よって (iv) より $\sigma(\alpha) \in L$ となり, (i) が得られた. $\square$

定義 9.2 前定理の条件が成り立つような代数拡大 L/K を**正規拡大**という. L は K 上**正規**であるともいう.

命題 9.3 任意の体 K の任意の 2 次拡大体は K 上正規である.

証明 L/K を 2 次拡大とする. 定理 9.1 の条件 (iv), すなわち, 任意の $\alpha \in L$ に対して $\text{Conj}(\alpha, K) \subset L$ を確かめればよい. $\alpha \in K$ ならばあきらかなので, $\alpha \notin K$ とする. このとき, α の K 上の最小多項式は 2 次式であり $X^2 - cX + d$ ($c, d \in K$) とすれば, 解と係数の関係から $\text{Conj}(\alpha, K) = \{ \alpha, c - \alpha \} \subset L$. $\square$

定義 9.4 体 K 上の多項式 $f(X)$ に対して, その根すべてを K に添加して得られる体を $f(X)$ の K 上の**最小分解体**という (それは K の代数拡大体, すなわち $\overline{K}$ の部分体になっている).

例 9.5 α が K 上代数的であるとき, α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体は $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ で与えられる.

定理 9.6 代数拡大 L/K について, 次は同値である.

- (i) L/K は有限次正規拡大である.
- (ii) L は K 上のある多項式の K 上の最小分解体である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): L/K は有限次拡大だから, K 上代数的な有限個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ によって $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と表される. L/K が正規であるという仮定より $\text{Conj}(\alpha_i, K) \subset L$ が成り立つ. 一方, $f_i(X)$ を α_i の K 上の最小多項式とすると, $\text{Conj}(\alpha_i, K)$ は $f_i(X)$ の根全体の集合と一致する. したがって,

$$f(X) = f_1(X) \cdots f_n(X)$$

とおくと, その K 上の最小分解体は

$$K(\text{Conj}(\alpha_1, K) \cup \cdots \cup \text{Conj}(\alpha_n, K)) \subset L$$

であるが, 左辺が $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L$ を含むのはあきらかなので (ii) が得られた.

(ii) $\Rightarrow$ (i): L が $f(X) \in K[X]$ の K 上の最小分解体であるとする. すなわち, $f(X)$ の根全体の集合を A とすれば, $L = K(A)$ が成り立つ. いま, $\sigma \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$ を任意にとる. $\alpha \in A$ ならば, 定理 6.11 より $\sigma(\alpha) \in \text{Conj}(\alpha, K)$ であり, さらに α の K 上の最小多項式は $f(X)$ の因子だから, $\text{Conj}(\alpha, K) \subset A$, よって $\sigma(A) \subset A$ が成り立つ (実際には $\sigma(A) = A$ がいえる). したがって, 定理 9.1 の (i) より, L は K 上正規である. $\square$

定理 9.7 α が体 K 上代数的であるとき, 次は同値である.

- (i) $K(\alpha)/K$ は正規拡大である.
- (ii) $K(\alpha)$ は α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体である.
- (iii) $K(\alpha) = K(\text{Conj}(\alpha, K))$ が成り立つ.
- (iv) $|\text{Aut}(K(\alpha)/K)| = |\text{Conj}(\alpha, K)|$ が成り立つ.

証明 (i) $\Rightarrow$ (iv): 定理 6.14 の証明で見たように, 単射

$$\Phi : \text{Aut}(K(\alpha)/K) \longrightarrow \text{Conj}(\alpha, K), \quad \sigma \mapsto \sigma(\alpha)$$

が定まる. いま, $\beta \in \text{Conj}(\alpha, K)$ を任意にとれば, 仮定 (i) より $\beta \in K(\alpha)$ だから $K(\beta) \subset K(\alpha)$, さらに K 上の次数を考えることにより $K(\beta) = K(\alpha)$ である. 一方, 定理 6.11 より $\tau(\alpha) = \beta$ をみたす $\tau \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$ が存在する. そこで, $\sigma = \tau|_{K(\alpha)}$ とおけば,

$$\sigma(K(\alpha)) = K(\sigma(\alpha)) = K(\beta) = K(\alpha),$$

よって $\sigma \in \text{Aut}(K(\alpha)/K)$ であって、もちろん $\sigma(\alpha) = \beta$. したがって、上記写像 Φ が全単射であることがわかり、(iv) を得る.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): 上で定めた Φ は、仮定 (iv) より全単射である. すなわち、 $\beta \in \text{Conj}(\alpha, K)$ ならば、 $\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \text{Aut}(K(\alpha)/K)$ が存在し、とくに $\beta \in K(\alpha)$. したがって

$$K(\text{Conj}(\alpha, K)) \subset K(\alpha).$$

逆の包含関係はあきらかだから、(iii) が示された.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): は最小分解体の定義より直ちにわかる.

(ii) $\Rightarrow$ (i): も定理 9.6 よりあきらかである. □

例 9.8 K が $\mathbf{R}$ の部分体で、 $K(\alpha)/K$ が 3 次拡大であるとする. $f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすると、

- (a) $K(\alpha)/K$ が正規拡大ならば、 $f(X)$ の 3 根はすべて実数である.
- (b) $f(X)$ の実根がただひとつならば、 $K(\alpha)/K$ は正規ではない.

例 9.9 3 次既約多項式 $g(X) = X^3 - 3X + 1$ の任意のひとつの根を β とすると、 $\mathbf{Q}(\beta)/\mathbf{Q}$ は正規拡大である. 実際、

$$g\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = -\frac{g(\beta)}{(1-\beta)^3} = 0, \quad g\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{g(\beta)}{\beta^3} = 0$$

より、 $g(X)$ の他の 2 根が $\frac{1}{1-\beta}$, $1 - \frac{1}{\beta}$ であることが確かめられるので、 $\mathbf{Q}(\beta)$ は $g(X)$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体、よって定理 9.7 より正規であることがわかる.

例 9.10 ω を 1 の原始 3 乗根とし、

$$K = \mathbf{Q}(\omega), \quad M = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}), \quad L = KM = \mathbf{Q}(\omega, \sqrt[3]{5})$$

とおく. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, $L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-3})$ と表せることに注意.

- (a) K は、 $X^2 + X + 1$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体であり、 $\mathbf{Q}$ 上正規である.
- (b) L は、 $X^3 - 5$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体であり、 $\mathbf{Q}$ 上正規である.
- (c) M は、 $\text{Conj}(\sqrt[3]{5}, \mathbf{Q}) = \{\sqrt[3]{5}, \omega\sqrt[3]{5}, \omega^2\sqrt[3]{5}\} \not\subset M$ より、 $\mathbf{Q}$ 上正規ではない.

例 9.11 自然数 n に対して $\zeta_n \in \mathbf{C}^\times$ を 1 の原始 n 乗根とする ($\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい). このとき、 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ は $\mathbf{Q}$ 上正規である. 実際、 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ は $X^n - 1$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体である.

例 9.12 $\mathbb{Q}$ 上の拡大体 K が $\zeta_n \in K$ をみたすとき, 任意の $a \in K$ に対して $K(\sqrt[n]{a})/K$ は正規拡大である. 実際, L を $X^n - a$ の K 上の最小分解体とすると,

$$L = K(\sqrt[n]{a}, \zeta_n \sqrt[n]{a}, \dots, \zeta_n^{n-1} \sqrt[n]{a})$$

であって, L/K は正規拡大である. ここで, $\zeta_n \in K$ に注意すれば, 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $\zeta_n^j \sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{a})$, よって $L = K(\sqrt[n]{a})$ となる.

定理 9.13 L/K を正規拡大とすると, 任意の中間体 M に対して L/M は正規拡大である.

証明 $\alpha \in L$ のとき, $\text{Conj}(\alpha, M) \subset \text{Conj}(\alpha, K)$ だから, 定理 9.1 (iv) を使えばよい. $\square$

注意 正規拡大 L/K の中間体 M は, 一般には K 上正規にはならない. 例 9.10 を参照.

定理 9.14 L, E がともに K 上正規ならば, $LE, L \cap E$ はどちらも K 上正規である.

証明 定理 9.1 の条件 (i) を使えばよい. $\square$

定理 9.15 L/K を正規拡大とすると, 任意の拡大 F/K に対して LF/F は正規拡大である.

証明 合成体 LF を扱う場合, L, F を含む体 Ω の存在を仮定していることに注意する (定義 4.12 参照). さらに Ω は代数的閉体であるとしてよく, また, K, F の代数的閉包 $\bar{K}, \bar{F}$ が Ω の部分体として一意的に定まり $\bar{K} \subset \bar{F}$ が成り立つことが, §6 での考察からわかる. この状況の下で, $\sigma \in \text{Aut}(\bar{F}/F)$ に対して, $\sigma|_{\bar{K}} \in \text{Aut}(\bar{K}/K)$ が成り立つことを確かめるのは難しくない. よって, L/K が正規であるという仮定より $\sigma(L) \subset L$ となるので, $\sigma(LF) = \sigma(L)\sigma(F) \subset LF$ が得られ, LF/F は正規である. $\square$

定義 9.16 代数拡大 L/K に対して, L を含む K 上の最小の正規拡大体を L/K の正規閉包という.

命題 9.17 α が K 上代数的であるとき, $K(\alpha)/K$ の正規閉包は $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ である.

証明 L を $K(\alpha)$ の正規閉包とする. 例 9.5 と定理 9.6 より, $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ は K 上正規だから, 最小の正規拡大である L は $K(\text{Conj}(\alpha, K))$ に含まれる. 一方, $\alpha \in L$ だから, 定理 9.1 の条件 (iv) より, $\text{Conj}(\alpha, K) \subset L$, したがって $K(\text{Conj}(\alpha, K)) \subset L$. よって $L = K(\text{Conj}(\alpha, K))$ を得る. $\square$