§5.　根の添加

以下で扱う準同型写像はどれも零写像ではないとする．このとき，

体から（単位元をもつ）環への準同型写像は単射

であることに注意する．【理由】体 K から環 R への準同型写像 $\sigma : K \to R$ の核 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ は体 K のイデアルだから，$\{0\}$ または K のどちらかであるが，いま，σ は零写像ではないとしているので，$\mathrm{Ker}\,\sigma = \{0\}$．したがって σ は単射である．

とくに，体から体への準同型写像が以下で頻繁に現れるが，これらはすべて単射準同型である．

定義 5.1　L/K を体の拡大とする．$\sigma : L \to M,\quad \tau : K \to M$　がそれぞれ L, K から体 M への準同型写像であって，

$$\forall a \in K \quad \text{に対して} \quad \sigma(a) = \tau(a)$$

をみたすとき，σ は τ の L への**延長**，あるいは，τ は σ の K への**制限**であるという．また，このとき $\tau = \sigma|_K$ と表す．

定義 5.2　L, M がともに体 K の拡大体で，準同型写像 $\sigma : L \to M$　が K の恒等写像　$\mathrm{id}_K : K \to K$　の延長であるとき，つまり，すべての $a \in K$ について $\sigma(a) = a$ が成り立つとき，σ を K **上の準同型写像**という．

定義 5.3　体 L から体 M への準同型写像 $\sigma : L \to M$ が全射であるとき，σ を**同型写像**といい，L と M は**同型**であるという．このとき

$$L \cong M$$

と表すことが多い．

定義 5.4　可換環 R から可換環 S への準同型写像

$$\sigma : R \longrightarrow S$$

が与えられたとき，R 上の多項式 $f(X) \in R[X]$ に対して，その係数に σ をほどこして得られる S 上の多項式を $f^\sigma(X)$ と表す．すなわち，$f(X) = \sum c_i X^i$ のとき $f^\sigma(X) = \sum \sigma(c_i) X^i$ と定める．このようにして，多項式環の間の準同型写像

$$R[X] \longrightarrow S[X]. \qquad f(X) \mapsto f^\sigma(X)$$

が自然に定義される．

定理 5.5　$f(X)$ が体 K 上の既約多項式ならば，剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である．ここで，

包含写像 $\iota : K \longrightarrow K[X]$,　　自然な全射 $\nu : K[X] \longrightarrow K[X]/(f(X))$

の合成写像として

$$\sigma = \nu \circ \iota : K \longrightarrow K[X]/(f(X))$$

を定めると，σ は体の準同型写像である．さらに，$\alpha \in K[X]/(f(X))$ を

$$\alpha = \nu(X) = X + (f(X))$$

と定めれば（すなわち，X の属する $K[X]/(f(X))$ の類を α とすれば），$f^{\sigma}(\alpha) = 0$ が成り立つ．

証明　$K[X]$ は PID だから，既約元で生成されるイデアル $(f(X))$ は極大イデアルであり，したがって，それによる剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である．また，ι，ν はどちらも準同型写像だから，σ は準同型写像である．いま，

$$f(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \qquad (c_i \in K)$$

とすれば，$\iota(c_i) = c_i \in K \subset K[X]$ だから，$\sigma(c_i) = \nu(c_i)$，したがって

$$f^{\sigma}(\alpha) = \nu(c_0) + \nu(c_1)\nu(X) + \cdots + \nu(c_n)\nu(X)^n = \nu(f(X)) = 0$$

となる． □

定理 5.6（クロネッカー） 体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体 L とその元 α で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在する．

証明　$f(X)$ の K 上の既約因子をあらためて $f(X)$ とおくことにより，初めから $f(X)$ は K 上の既約多項式であるとしてよい．このとき，$L = K[X]/(f(X))$, $\alpha = X+(f(X)) \in L$ とおけば，定理 5.5 より，L は体であり，単射準同型写像 $\sigma : K \to L$ が定義できて，$f^{\sigma}(\alpha) = 0$ をみたす．そこで，σ の像 $\sigma(K)$ を K と同一視すればよい． □

注意　定理 5.6 から，K 上の既約多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体 L と $f(X)$ の根 $\alpha \in L$ が存在する．この α を用いて，準同型写像

$$\varphi_\alpha : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

が定義できて，$\mathrm{Im}\,\varphi_\alpha = K(\alpha) \subset L$ がわかる（§3 を参照）．一方，$\mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha$ が $K[X]$ のイデアル $(f(X))$ に一致することが，$f(X)$ の K 上の既約性から確認できる（定理 3.8 参照）．したがって，準同型定理より，φ_α は同型写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha)$$

を引き起こす．なお，定理 5.5 の準同型写像 σ と $\tilde{\varphi}_\alpha$ との合成 $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \sigma$ は，K から $K(\alpha)$ への包含写像に他ならない．

例 5.7 X^2+1 は実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の既約多項式であり，その根 i に対して，$\boldsymbol{R}(i)$ は剰余環 $\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1)$ と同型である． $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}(i)$ とかけば,

$$\boldsymbol{C}\cong\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1).$$

$1,i$ は $\boldsymbol{C}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の基底であって，$\boldsymbol{C}$ の任意の元は $a+bi$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$ の形に一意的に表される． ここで，$\boldsymbol{C}$ の 2 元

$$a+bi,\quad c+di\quad (a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$$

に “対応” する多項式 $a+bX,\, c+dX\in\boldsymbol{R}[X]$ の積

$$ac+(ad+bc)X+bdX^2=(ac-bd)+(ad+bc)X+bd(X^2+1)$$

は，$\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1)$ においては $(ac-bd)+(ad+bc)X$ と同じ類に属する． つまり

$$(a+bX)(c+dX)\equiv(ac-bd)+(ad+bc)X\pmod{(X^2+1)}$$

であり，これはよく知られた複素数における積の公式

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

に対応する． この例は，虚数単位 i を導入しなくても複素数体が構成できることを示している．

例 5.8 $f(X)=X^3-4X+2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であり，その任意の根 α に対して，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は剰余環 $\boldsymbol{Q}[X]/(f(X))$ と同型である;

$$\boldsymbol{Q}(\alpha)\cong\boldsymbol{Q}[X]/(f(X)).$$

$1,\alpha,\alpha^2$ は $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の基底であり，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の任意の元は $1,\alpha,\alpha^2$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の 1 次結合で表される． たとえば

$$\beta=1+\alpha^2,\qquad \gamma=3-2\alpha+\alpha^2$$

の積は，次の様に計算される． まず，多項式の積を計算して得られる 4 次式

$$(1+X^2)(3-2X+X^2)=X^4-2X^3+4X^2-2X+3$$

を $f(X)$ で割って

$$X^4-2X^3+4X^2-2X+3=(X-2)f(X)+(8X^2-12X+7).$$

このとき，余り $8X^2-12X+7$ に対応する $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の元が $\beta\gamma$ である． こうして，積 $\beta\gamma=7-12\alpha+8\alpha^2$ が計算できた．

例 5.9　$g(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約ではなく，$g(X) = (X+1)(X^2+1)$ のように $\boldsymbol{Q}$ 上の既約因子に分解される．この分解に対応して，剰余環 $\boldsymbol{Q}[X]/(g(X))$ は

$$\boldsymbol{Q}[X]/(g(X)) \cong (\boldsymbol{Q}[X]/(X+1)) \oplus \bigl(\boldsymbol{Q}[X]/(X^2+1)\bigr) \cong \boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{Q}(i).$$

のように体の直和と同型になることが確かめられる．一般に，体 K 上の多項式 $g(X)$ が可約であってかつ重根をもたないならば，剰余環 $K[X]/(g(X))$ は複数個の体の直和と同型である．

定理 5.10　体 K 上の既約多項式 $f(X)$ とその任意の 2 根 α, β に対して，K 上の同型写像

$$\sigma : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta)$$

で，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在する．

証明　定理 5.6 の後の注意より，$g(X) \in K[X]$ を $g(\alpha)$ または $g(\beta)$ に写すことで定まる準同型写像

$$K[X] \longrightarrow K(\alpha), \qquad K[X] \longrightarrow K(\beta)$$

は，同型写像

$$\tau : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha), \qquad \rho : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\beta)$$

をそれぞれ引き起こす．このとき，$\sigma = \rho \circ \tau^{-1}$ が求める同型写像となる．□

例 5.11　$X^2 + 1$ のひとつの根を i とすれば，もうひとつの根は $-i$ である．このとき，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(i)$ から自分自身への写像

$$\boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \quad a + bi \mapsto a - bi \qquad (\text{ただし } a, b \in \boldsymbol{R})$$

が $\boldsymbol{R}$ 上の同型写像になっている．この写像は，ふつう複素共役写像とよばれる．

例 5.12　$X^3 - 2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であり，その実根を $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とすると，他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$（$\omega = e^{2\pi i/3}$ は 1 の原始 3 乗根）である．このとき，3 つの体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$, $\boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$, $\boldsymbol{Q}(\alpha\omega^2)$ は互いに同型である．より具体的には，写像

$$\begin{aligned}
\sigma : \boldsymbol{Q}(\alpha) \longrightarrow \boldsymbol{Q}(\alpha\omega), &\qquad a + b\alpha + c\alpha^2 \ \mapsto\ a + b\alpha\omega + c\alpha^2\omega^2 \\
\tau : \boldsymbol{Q}(\alpha) \longrightarrow \boldsymbol{Q}\bigl(\alpha\omega^2\bigr), &\qquad a + b\alpha + c\alpha^2 \ \mapsto\ a + b\alpha\omega^2 + c\alpha^2\omega
\end{aligned}$$

が $\boldsymbol{Q}$ 上の同型写像となっている（$a, b, c \in \boldsymbol{Q}$）．$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は実数体の部分体であり，$\boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$ と $\boldsymbol{Q}(\alpha\omega^2)$ は実数体には含まれていないが，これら 3 つの体は代数的には同等の性質をもっている．