

§4. 代数拡大

定義 4.1 L/K を体の拡大とする. L の任意の元が K 上代数的であるとき, L は K 上代数的であるという. また, L/K を代数拡大という. L が K 上代数的でないとき, L は K 上超越的であるといい, L/K を超越拡大という.

命題 4.2 有限次拡大は代数拡大である.

証明 L/K を有限次拡大とする. 任意の $\alpha \in L$ に対して, L/K の中間体である $K(\alpha)$ は, 定理 2.9 より K 上の有限次拡大体だから, 定理 3.7 によって, α は K 上代数的である. L の任意の元が K 上代数的あることが示されたから, L/K は代数拡大である. \square

命題 4.3 体の拡大 L/K に対して次は同値である.

- (i) L/K は有限次拡大である.
- (ii) K 上代数的な有限個の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ が存在して, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が成り立つ.

証明 (i) のとき, ベクトル空間としての L の K 上の基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をとれば, 前命題よりこれらはすべて K 上代数的であり, (ii) が導かれる. 逆に, (ii) のときは,

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \dots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$

とおけば, 各 $i = 1, \dots, n$ について, α_i は K_{i-1} 上代数的だから, 定理 3.7 より K_i/K_{i-1} は有限次, よって, 定理 2.9 から $L = K_n$ は K 上有限次であり, (i)を得る. \square

定理 4.4 M を体の拡大 L/K の中間体とするとき, 次は同値である.

- (i) L/K は代数拡大である.
- (ii) $L/M, M/K$ はともに代数拡大である.

証明 (i) ならば (ii) が成り立つののはあきらかなので, 以下, (ii) を仮定して (i), すなわち, 任意の $\alpha \in L$ が K 上代数的であることを確かめればよい. (ii) より L/M は代数的だから, α は M 上代数的, したがって, α を根とする M 上の零でない多項式

$$g(X) = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n \quad (c_i \in M)$$

が存在する。いま、 $M_0 = K(c_0, c_1, \dots, c_n)$ とおくと、 α は M_0 上代数的であるから、定理 3.7 より $M_0(\alpha)/M_0$ は有限次である。一方、仮定(ii) より M/K も代数的なので c_i は K 上代数的、よって、前命題より M_0/K は有限次である。したがって、定理 2.9 から、 $M_0(\alpha)/K$ は有限次拡大であり、さらに命題 4.2 から代数拡大でもある。とくに α は K 上代数的である。□

例 4.5 自然数 n に対して、 $X^n - 1 = 0$ の根である複素数全体を W_n とする；

$$W_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}.$$

いま、

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$$

とおけば、 $W_n = \{\zeta_n^j \mid j = 0, 1, \dots, n-1\}$ と具体的にかけ、これが $X^n - 1$ の根全体の集合と一致する。よって、命題 4.3 より $\mathbf{Q}(W_n)/\mathbf{Q}$ は有限次、したがって、命題 4.2 より代数拡大である（実際には、 $\mathbf{Q}(W_n) = \mathbf{Q}(\zeta_n)$ が成り立っているので、命題 4.3 は必要とせず、定理 3.7 を使えばよい）。とくに n が素数 p の場合、 ζ_p は $X^p - 1$ の既約因子 $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$ の根だから、定理 3.8 より、

$$[\mathbf{Q}(W_p) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\zeta_p) : \mathbf{Q}] = p - 1.$$

この等式は、任意の自然数 n に対して、オイラー関数 φ を用いた等式

$$[\mathbf{Q}(W_n) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$$

に拡張されるが、証明は少し難しい。

補題 4.6 L/K を体の拡大とし、 $A \subset L$ とすると、 $K(A)$ は A の有限部分集合 B のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_B K(B)$$

と表される。すなわち、任意の $\alpha \in K(A)$ に対して、 $\alpha \in K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$ がとれる。

証明 $M = \bigcup_B K(B)$ とおく。このとき、 $M \subset K(A)$ は直ちにわかる。一方、あきらかに $K \subset M$ であり、また $A \subset M$ もすぐにわかるから、 M が体であれば $K(A) \subset M$ 、したがって補題を得る。以下、 M が体であることを確かめる。 M の任意の元 $\beta, \gamma \neq 0$ に対して、 $\beta \in K(B)$, $\gamma \in K(C)$ をみたす A の有限部分集合 B, C がとれる。 $D = B \cup C$ とおけば、 D も A の有限部分集合であって $\beta, \gamma \in K(D)$ であるが、 $K(D)$ は体なので、 β, γ の和、差、積、商は $K(D)$ に属する。さらに $K(D) \subset M$ なので、これらは M に属する。よって、 M は体である。□

定理 4.7 L/K を体の拡大とし, $A \subset L$ とする. A の任意の元が K 上代数的ならば $K(A)/K$ は代数拡大である.

証明 任意の $\alpha \in K(A)$ に対して, 前補題から, $\alpha \in K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ をみたす $\beta_i \in A$ がとれる. 仮定より β_i は K 上代数的だから, 拡大 $K(\beta_1, \dots, \beta_n)/K$ は, 命題 4.3 より有限次, よって命題 4.2 より代数的, とくに α は K 上代数的である. \square

系 4.8 L/K を体の拡大とする. $\alpha, \beta \in L$ ($\beta \neq 0$) がともに K 上代数的ならば, それらの和と差 $\alpha \pm \beta$, 積 $\alpha\beta$, 商 α/β はどれも K 上代数的である.

証明 前定理より $K(\alpha, \beta)$ は K 上代数的であり, $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha, \beta)$ だから結論を得る. \square

例 4.9 複素数平面における単位円を S とする. また, ある自然数 n に対して, $z^n = 1$ をみたす複素数全体を W で表す.

$$\begin{aligned} S &= \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \} = \{ x + iy \in \mathbf{C} \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1 \}, \\ W &= \{ z \in \mathbf{C} \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n. \end{aligned}$$

すべての $n \in \mathbf{N}$ について, $W_n \subset W \subset S$, したがって $\mathbf{Q}(W_n) \subset \mathbf{Q}(W) \subset \mathbf{Q}(S)$. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $\mathbf{Q}(W)/\mathbf{Q}$ は有限次ではない代数拡大である.
- (2) $\mathbf{Q}(S)/\mathbf{Q}$ は超越拡大である. したがって $\mathbf{Q}(S)/\mathbf{Q}(W)$ も超越拡大である.

(1) は, 定理 4.7 および例 4.5 から容易に証明できる. また, $0 < \varepsilon < 1$ をみたす \mathbf{Q} 上超越的な実数 ε (たとえば $\varepsilon = \pi/4$ など...) をとれば, $\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \varepsilon i$ は S に属し, \mathbf{Q} 上超越的であることが確かめられるから, (2) も示される.

命題 4.10 L/K を体の拡大とし, M をその中間体とする. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとき,

$$[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ.

証明 α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とすると, $\deg f = [K(\alpha) : K]$. 一方, $f(X)$ は M 上の多項式でもあるから, 補題 3.5 より, $[M(\alpha) : M] \leq \deg f$ であり, 求める不等式を得る. \square

例 4.11 $X^3 - 1$ の 1 でない根のひとつを ω とする (1 の原始 3 乗根). このとき, ω, ω^2 は $X^2 + X + 1$ の 2 根である. $X^3 - 2$ の実根を α とすれば, 他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ で与えられる. $X^3 - 2$ は \mathbf{Q} 上既約だから, 定理 3.8 より $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ は 3 次拡大である. このとき,

- (a) $M_1 = \mathbf{Q}(\omega)$ とおけば, $[M_1(\alpha) : M_1] = 3 = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$,
- (b) $M_2 = \mathbf{Q}(\alpha\omega)$ とおけば, $[M_2(\alpha) : M_2] = 2 < 3 = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$

が成り立ち, それぞれ, 前命題において, 等号が成り立つ例, 成り立たない例となっている.

定義 4.12 Ω/K を体の拡大とし, L, M をその中間体とするとき, L, M をともに含む Ω の最小の部分体を L, M の合成体といい LM で表す. すなわち, $LM = L(M) = M(L)$ である.

定理 4.13 L, M を体の拡大 Ω/K の中間体とする. L/K が有限次拡大ならば,

$$[LM : M] \leq [L : K]$$

が成り立ち, とくに, LM/M も有限次拡大である.

証明 命題 4.3 より, $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ をみたす K 上代数的な元 α_i がとれる. そこで, 体の拡大列 $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ および $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n$ を

$$\begin{aligned} K_0 &= K, & K_1 &= K_0(\alpha_1), & K_2 &= K_1(\alpha_2), & \dots, & K_n &= K_{n-1}(\alpha_n) \\ M_0 &= M, & M_1 &= M_0(\alpha_1), & M_2 &= M_1(\alpha_2), & \dots, & M_n &= M_{n-1}(\alpha_n) \end{aligned}$$

と定めれば, 命題 4.10 より $[M_i : M_{i-1}] \leq [K_i : K_{i-1}]$. さらに, $L = K_n$ かつ $LM = M_n$ だから, 定理 2.9 を何度か適用して

$$[LM : M] = [M_n : M_{n-1}] \cdots [M_1 : M_0] \leq [K_n : K_{n-1}] \cdots [K_1 : K_0] = [L : K]$$

が導かれる. \square