§1.　2次, 3次, 4次方程式の解の公式

定理 1.1　2次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は，$b^2 - 4c$ の平方根をひとつ固定し，それを R とするとき，

$$\frac{-b+R}{2}, \qquad \frac{-b-R}{2}$$

で与えられる．

証明　解を α, β とすれば，解と係数の関係から，$\alpha + \beta = -b$,　$\alpha\beta = c$.　よって，

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$$

そこで，この平方根のひとつを R とし，α, β に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha - \beta = R \end{cases}$$

を解けば，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -b \\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b+R \\ -b-R \end{pmatrix}$$

を得る．　□

定理 1.2　3次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は，Y に関する2次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の2解それぞれの3乗根 R, S を，$RS = b^2 - 3c$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega^2 R+\omega S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega R+\omega^2 S}{3}$$

で与えられる．　ここで，ω は1の原始3乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

である．

証明　3つの解を α,β,γ とし，

$$\begin{aligned}Q &= \alpha+\beta+\gamma,\\ R &= \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma,\\ S &= \alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma\end{aligned}$$

とおく．これらを α,β,γ の連立方程式と考え，係数行列を M とする．ここで

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega^2 - 3\omega = 3\omega(\omega-1) \neq 0$$

より，M は正則である．よって，Q,R,S が求まれば，M の逆行列を実際に計算することにより

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ R \\ S \end{pmatrix}$$

から α,β,γ が得られる．さて，解と係数の関係から $Q=-b$ だが，

$$R^3+S^3 = -2b^3+9bc-27d, \qquad RS = b^2-3c$$

も，ちょっとがんばればわかる．したがって，R^3,S^3 は定理にある Y に関する 2 次方程式の解である．R,S は，これらの 3 乗根として求まり，定理の主張が導かれる．　□

定理 1.3　4 次方程式

$$X^4+bX^3+cX^2+dX+e=0$$

の解は，Y に関する 3 次方程式

$$Y^3-(3b^2-8c)Y^2+(3b^4-16b^2c+16c^2+16bd-64e)Y-(b^3-4bc+8d)^2=0$$

の 3 解それぞれの平方根 R,S,T を，$RST=-b^3+4bc-8d$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S+T}{4}, \quad \frac{-b+R-S-T}{4}, \quad \frac{-b-R+S-T}{4}, \quad \frac{-b-R-S+T}{4}$$

で与えられる．

証明　$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を 4 つの解として

$$\begin{aligned}Q &= \alpha+\beta+\gamma+\delta,\\ R &= \alpha+\beta-\gamma-\delta,\\ S &= \alpha-\beta+\gamma-\delta,\\ T &= \alpha-\beta-\gamma+\delta\end{aligned}$$

とおく． Q, R, S, T が求まれば，上の式を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関する連立方程式とみなして解けばよい． 解と係数の関係から $Q = -b$ だが，

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 + T^2 &= 3b^2 - 8c, \\ R^2S^2 + S^2T^2 + T^2R^2 &= 3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e, \\ RST &= -b^3 + 4bc - 8d \end{aligned}$$

も，うんとがんばって計算すれば得られる． したがって，R^2, S^2, T^2 は定理にある Y に関する 3 次方程式の解である． R, S, T は，これらの平方根として求まり，定理の主張が導かれる． □

定義 1.4 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つとき，**対称式**であるという（正確には $x_1, \ldots, x_n$ の対称式という）．

定義 1.5 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}s_{n-1}X + (-1)^n s_n$$

によって定まる $s_1, \ldots, s_n$ を，$x_1, \ldots, x_n$ の**基本対称式**という． とくに，s_j を j 次の基本対称式という．

例 1.6 基本対称式は対称式である．

$n = 2$ のとき $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1x_2 \end{cases}$

$n = 3$ のとき $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$

$n = 4$ のとき $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ s_4 = x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$

例 1.7　x_1, x_2, x_3 の対称式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

は，上に定めた $n = 3$ のときの基本対称式 s_1, s_2, s_3 によって

$$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 - 3s_2$$

と表すことができる．

定理 1.8　(対称式の基本定理)　$x_1, \ldots, x_n$ の任意の対称式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，ある n 変数多項式 $G(X_1, \ldots, X_n)$ が存在して，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = G(s_1, \ldots, s_n)$$

が成り立つ．　すなわち，任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる．

例 1.9　証明は，難しいことは使わないが煩雑なので省略する．　以下に例を挙げて証明の代わりとする．

(1) $f(x, y) = x^4 + y^4$　を x, y の基本対対称式

$$s = x + y, \quad t = xy$$

の多項式として表す．

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 \\ f(x,y) - s^4 &= -4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 \\ f(x,y) - s^4 + 4s^2t &= 2x^2y^2 \\ f(x,y) - s^4 + 4s^2t - 2t^2 &= 0 \end{aligned}$$

よって，$f(x, y) = s^4 - 4s^2t + 2t^2$.

(2) $g(x, y, z) = x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$　を　x, y, z　の基本対称式

$$s = x + y + z, \quad t = xy + yz + zx, \quad u = xyz$$

の多項式で表す．

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + z^3y \\ g(x,y,z) - s^2t &= -2x^2y^2 - 5x^2yz - 2x^2z^2 - 5xy^2z - 5xyz^2 - 2y^2z^2 \\ g(x,y,z) - s^2t + 2t^2 &= -x^2yz - xy^2z - xyz^2 \\ g(x,y,z) - s^2t + 2t^2 + su &= 0 \end{aligned}$$

ゆえ，$g(x, y, z) = s^2t - 2t^2 - su$.