§13. クンマー拡大

以下において扱う体はすべて $\boldsymbol{C}$ の部分体とする． また，自然数 n に対して，$\zeta_n \in \boldsymbol{C}$ を 1 の原始 n 乗根とする． すなわち，$\zeta_n \in \boldsymbol{C}^\times$ であって，その位数が n であるとする（$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい）．

定理 13.1　n を自然数とし，K が 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むとする． $a \in K^\times$ に対して，$\alpha^n = a$ をみたす α を任意にひとつとり $L = K(\alpha)$ とおく．

(1) L は $X^n - a$ の K 上の最小分解体である．

(2) $X^n - a$ が K 上既約（すなわち α の K 上の最小多項式）ならば，L/K は n 次巡回拡大であり，$\sigma(\alpha) = \zeta_n\alpha$ をみたす K 上の自己同型 σ によって $\mathrm{Gal}(L/K)$ が生成される;

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}.$$

(3) $\alpha^l \in K$ である最小の自然数 l が存在し，この l に対して $X^l - \alpha^l$ は K 上既約である． この場合，L/K は l 次巡回拡大である．

証明　(1) $X^n - a$ のすべての根は $\alpha, \zeta\alpha, \zeta^2\alpha, \ldots \zeta^{n-1}\alpha$ であるが，$\zeta \in K$ より最小分解体は $K(\alpha) = L$ と一致する（例 9.12 参照）． 以下，$\zeta = \zeta_n$ と略記する．
(2) L/K がガロア拡大であることは (1) よりわかる． $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく． $X^n - a$ は α の K 上の最小多項式なので，$|G| = [L : K] = n$ である． さらに，$\zeta\alpha$ は $X^n - a$ の根だから α と共役，よって定理 6.11 を使えば，$\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ をみたす $\sigma \in G$ が存在することがわかる． このとき，

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\zeta\alpha) = \zeta\sigma(\alpha) = \zeta \cdot \zeta\alpha = \zeta^2\alpha,$$

一般に，$\sigma^j(\alpha) = \zeta^j\alpha$ が任意の $j \in \boldsymbol{Z}$ について成り立つ． このことと $|G| = n$ より

$$G = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\} = \langle\sigma\rangle$$

を得る（$\sigma^n(\alpha) = \zeta^n\alpha = \alpha$ より $\sigma^n = \mathrm{id}_L (= 1)$ であることに注意）． とくに L/K は n 次巡回拡大である．
(3) 最小の l が存在することはあきらかであり，さらに l が n の約数であることを示すのも難しくない． いま，$\xi = \zeta^{n/l}$ とおけば，ξ は 1 の原始 l 乗根であり，$X^l - \alpha^l$ のすべての根は $\xi^i\alpha$ $(i = 0, \ldots, l-1)$ である． よって，もし $X^l - \alpha^l$ が K 上可約ならば，その既約因子 $g(X) \in K[X]$ は，$1 \leq d < l$ と $0 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq l-1$ を用いて

$$g(X) = (X - \xi^{i_1}\alpha) \cdots (X - \xi^{i_d}\alpha)$$

と表され，とくに，その定数項は $g(0) = \pm\xi^{i_1+\cdots+i_d}\alpha^d \in K$ となる． 一方，$\xi = \zeta^{n/l} \in K$ だから $\alpha^d \in K$ でなければならないが，これは l の最小性に矛盾する． L/K が l 次巡回拡大であることは (2) を援用すればわかる． □

定義 13.2　前定理のようにして与えられる拡大 L/K を自然数 n に関する**巡回クンマー拡大**という．n にい関する巡回クンマー拡大の合成を，n に関するクンマー拡大という．とくに，体の有限次拡大 L/K が n に関する**クンマー拡大**であるとは，K が 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含み，有限個の $a_1, \ldots, a_r \in K^\times$ について $\alpha_j^n = a_j$ をみたす α_j によって $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ と表されることである．クンマー拡大は，しばしば $L = K\big(\sqrt[n]{a_1}, \ldots, \sqrt[n]{a_r}\big)$ とも表される．

定義 13.3　L/K を体の拡大とする．

(1) $X^n - a$ $(a \in K^\times)$ の形の K 上の既約多項式の根 α によって $L = K(\alpha)$ と表すことができるとき，L/K を 2 **項拡大**という．

(2) 体の有限列 $K_0, K_1, \cdots, K_m$ で，

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m = L$$
$$K_i/K_{i-1} \quad \text{は 2 項拡大} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

をみたすものが存在するとき，L/K を**ベキ根拡大**という．

定義 13.4　L/K を代数拡大とする．中間体の有限列 $K_0, K_1, \cdots, K_m$ で，

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m = L$$
$$K_i/K_{i-1} \quad \text{はアーベル拡大} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

をみたすものがとれるとき，L/K を**塁アーベル拡大**という．

注意　定理 13.1 において，$X^n - a$ が K 上既約ならば L/K はあきらかに 2 項拡大であるが，たとえ既約でなくても，(3) より，やはり 2 項拡大になる．したがって，一般にクンマー拡大はベキ根拡大である．

補題 13.5　n を 1 より大きい自然数とする．体 K に対して $K(\zeta_n)/K$ は n より低い次数のアーベル拡大である．

証明　$\zeta = \zeta_n$ と略す．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(\zeta)$ も 1 の原始 n 乗根だから，とくに $\sigma(\zeta) \in K(\zeta)$，よって $K(\zeta)/K$ はガロア拡大である．そのガロア群を G とおく．$\sigma \in G$ に対して，$\sigma(\zeta) = \zeta^j$ をみたす整数 j が n を法として一意的に定まる．また，上述のように ζ^j は 1 の原始 n 乗根だから，j, n は互いに素である．よって，写像

$$G \longrightarrow (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times, \qquad \sigma \mapsto \overline{j}$$

が定義できることがわかる．この写像が単射準同型であることを確かめるのは難しくない．よって，G は $(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$ の部分群に同型，とくにアーベル群であり，

$$[K(\zeta) : K] = |G| \leq \big|(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times\big| = \varphi(n) < n.$$

ここで，φ はオイラー関数である．　□

定理 13.6　ベキ根拡大 L/K に対して，有限次塁アーベル拡大 L'/K で $L \subset L'$ をみたすものが存在する．

証明　L/K の中間体の列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m = L$$
$$K_i/K_{i-1} \quad \text{は 2 項拡大} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

が存在する．ここで，

$$K_i = K_{i-1}(\alpha_i), \qquad \alpha_i \text{ は } K_{i-1} \text{ 上の既約多項式 } X^{n_i} - a_i \text{ の根}$$

と表すことができる．そこで，n を $n_1, \ldots, n_m$ の公倍数とし，ζ を 1 の原始 n 乗根として，$M_i = K_i(\zeta)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ とおく．$i = 1, \ldots, m$ に対して，M_{i-1} は 1 の原始 n_i 乗根をもっているから，$M_i = M_{i-1}(\alpha_i)$ は M_{i-1} 上の巡回クンマー拡大，したがって巡回拡大である．一方，補題 13.5 より，$M_0 = K(\zeta)$ は K 上のアーベル拡大なので，$M_m = L(\zeta)$ は K 上有限次塁アーベル拡大である．　□

上の定理において，べき根拡大と有限次塁アーベル拡大の役割を入れ替えても正しいことが次節で示される（定理 14.2）．すなわち，これらの拡大は “本質的” に同等であることがわかるが，その前に準備として次の重要な補題を用意する．

補題 13.7　(デデキント)　Γ を乗法群とし，$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ を Γ から $\boldsymbol{C}^\times$ への相異なる準同型写像とする．このとき，$(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ をみたす任意の $c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(\gamma) = c_1\sigma_1(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\gamma) \neq 0$$

をみたす $\gamma \in \Gamma$ が存在する．

証明　対偶，すなわち，$c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ とするとき，

$$\forall \gamma \in \Gamma \text{ に対して } \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

を n に関する数学的帰納法によって示す．$n = 1$ のときはあきらかである．そこで，$n > 1$ として，$n - 1$ のときは成り立つと仮定し，任意の $\gamma \in \Gamma$ について

$$(\spadesuit) \qquad c_1\sigma_1(\gamma) + c_2\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\gamma) = 0$$

とする．いま，$\sigma_1 \neq \sigma_n$ だから，$\sigma_1(\beta) \neq \sigma_n(\beta)$ であるような $\beta \in \Gamma$ がとれる．等式 $(\spadesuit)$ の γ の代わりに $\beta\gamma$ を用いれば，

$$c_1\sigma_1(\beta)\sigma_1(\gamma) + c_2\sigma_2(\beta)\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma) = 0.$$

これと，(♠) に $\sigma_n(\beta)$ をかけたもの

$$c_1\sigma_n(\beta)\sigma_1(\gamma)+c_2\sigma_n(\beta)\sigma_2(\gamma)+\cdots+c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma)=0$$

の差を取れば，最後の項 $c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma)$ が消去されて，

$$c_1(\sigma_1(\beta)-\sigma_n(\beta))\sigma_1(\gamma)+\cdots+c_n(\sigma_{n-1}(\beta)-\sigma_n(\beta))\sigma_{n-1}(\gamma)=0$$

が任意の $\gamma\in\Gamma$ について成り立つ． よって，帰納法の仮定と β の取り方から $c_1=0$ を得る． したがって (♠) は

$$c_2\sigma_2(\gamma)+\cdots+c_n\sigma_n(\gamma)=0$$

と書き換えられ，再び帰納法の仮定より $c_2=\cdots=c_n=0$ を得る． □

定理 13.8 n を自然数とし，体 K は 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むとする． もし L/K が n 次巡回拡大ならば，ある $a\in K^\times$ が存在して，$L=K(\sqrt[n]{a})$ と表される． すなわち，$\zeta_n\in K$ ならば K 上の n 次巡回拡大は巡回クンマー拡大である．

証明 $\zeta=\zeta_n$ と略記する． σ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元とする;

$$\mathrm{Gal}(L/K)=\langle\sigma\rangle=\left\{1,\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{n-1}\right\},\qquad \sigma^n=1.$$

いま，$\Gamma=L^\times$，$\sigma_i=\sigma^{i-1}$ および $c_i=\zeta^{-(i-1)}$ $(i=1,\ldots,n)$ として前補題を適用すれば，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{-i}\sigma^i(\gamma)=\gamma+\zeta^{-1}\sigma(\gamma)+\cdots+\zeta^{-(n-1)}\sigma^{n-1}(\gamma)\neq 0$$

をみたす $\gamma\in L^\times$ が存在する． この和を α とすると，$0\neq\alpha\in L$ であって

$$\sigma(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{-i}\sigma^{i+1}(\gamma)=\zeta\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{-(i+1)}\sigma^{i+1}(\gamma)=\zeta\alpha$$

が成り立ち，両辺を n 乗して $\sigma(\alpha^n)=\alpha^n$ を得る． σ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元だから，α^n は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の不変体 K に属する． すなわち $\alpha^n\in K$ である． ここで，系 6.12 より

$$\left\{\sigma^j(\alpha)\,|\,j=0,1,2,\ldots,n-1\right\}\subset\mathrm{Conj}(\alpha,K)$$

だが，左辺は $\left\{\alpha,\zeta\alpha,\zeta^2\alpha,\ldots,\zeta^{n-1}\alpha\right\}$ に等しく，$\alpha\neq 0$ より n 個の元からなるので，

$$n\leq|\mathrm{Conj}(\alpha,K)|\leq[K(\alpha):K]\leq[L:K]=n,$$

よって，不等号はすべて等号であり，とくに $L=K(\alpha)$ が得られる． □

定理 13.9 n を自然数とし，体 K は 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むとする． このとき，L/K が n に関するクンマー拡大であるためには，L/K が有限次アーベル拡大でガロア群のすべての元の位数が n の約数であることが必要十分である．