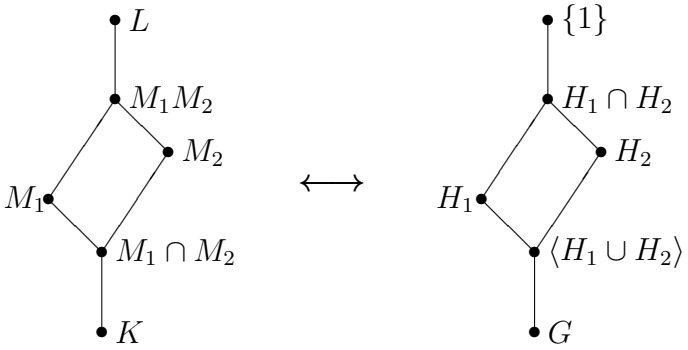
§11. ガロア対応

定理 11.1 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． いま，L/K の中間体 M_1, M_2 がそれぞれ G の部分群 H_1, H_2 に対応しているとする．

(1) $M_1 \subset M_2$ と $H_1 \supset H_2$ は同値である．

(2) 合成体 M_1M_2 に対応する部分群は $H_1 \cap H_2$ である．

(3) $M_1 \cap M_2$ に対応する部分群は $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である．



証明 (1) まず $M_1 \subset M_2$ を仮定する． $\sigma \in H_2 = \mathrm{Gal}(L/M_2)$ を任意にとると，

$$\sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_2) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_1), \quad \therefore \sigma \in \mathrm{Gal}(L/M_1) = H_1$$

よって $H_2 \subset H_1$ を得る． 逆に $H_2 \subset H_1$ を仮定する． $x \in M_1 = L^{H_1}$ を任意にとると，

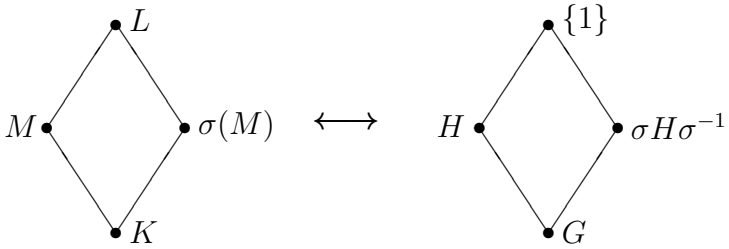
$$\sigma(x) = x \quad (\forall \sigma \in H_1) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x \ (\forall \sigma \in H_2), \quad \therefore x \in L^{H_2} = M_2$$

よって $M_1 \subset M_2$ を得る．

(2) M_1M_2 は M_1, M_2 を含む最小の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 に含まれる最大の部分群 $H_1 \cap H_2$ である．

(3) $M_1 \cap M_2$ は M_1, M_2 に含まれる最大の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 を含む最小の群であり，それは $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である． □

定理 11.2 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする． また，$\sigma \in G$ とする．このとき，$\sigma(M)$ は L/K の中間体であり，対応する G の部分群は $\sigma H \sigma^{-1}$ である．



証明　L/K は正規なので $\sigma(L)=L$，よって $K\subset\sigma(M)\subset L$ となるから $\sigma(M)$ は L/K の中間体である．　また，$M=L^H$ より，$\alpha\in L$ に対して

$$\alpha\in M \iff \tau(\alpha)=\alpha \quad (\forall\tau\in H).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\beta\in\sigma(M) &\iff \sigma^{-1}(\beta)\in M \iff \tau(\sigma^{-1}(\beta))=\sigma^{-1}(\beta) \quad (\forall\tau\in H)\\ &\iff (\sigma\tau\sigma^{-1})(\beta)=\beta \quad (\forall\tau\in H) \iff \rho(\beta)=\beta \quad (\forall\rho\in\sigma H\sigma^{-1})\end{aligned}$$

よって，中間体 $\sigma(M)$ は部分群 $\sigma H\sigma^{-1}$ に対応する．　□

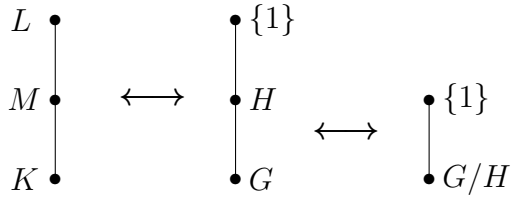
定理 11.3　L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする．　M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする．　このとき，M/K がガロア拡大であるためには，H が G の正規部分群であることが必要十分である．　またこのとき M/K のガロア群は G/H と同型である．　詳しくは，制限写像

$$G=\mathrm{Gal}(L/K)\longrightarrow\mathrm{Gal}(M/K),\quad \sigma\mapsto\sigma|_M$$

から自然に同型

$$G/H=\mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M)\cong\mathrm{Gal}(M/K)$$

が引き起こされる．



証明　L/K がガロア拡大なので，とくに M/K は分離的である．　したがって，M/K がガロアであるためには，正規であること，すなわち，任意の $\sigma\in G$ に対して $\sigma(M)=M$ が成り立つことが必要十分である．　前定理を用いれば，

$$\sigma(M)=M \iff \sigma H\sigma^{-1}=H$$

であるが，右の等式が任意の $\sigma\in G$ に対して成り立つことは，H が G の正規部分群であることを示している．　後半は，準同型定理から導かれる．　□

系 11.4　L/K を有限次ガロア拡大，M をその中間体とする．

(1) L/K がアーベル拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともにアーベル拡大である．

(2) L/K が巡回拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともに巡回拡大である．

(3) L/K が可解拡大ならば，L/M も可解拡大である． さらに M/K がガロア拡大（すなわち $\mathrm{Gal}(L/M)$ が $\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群）ならば，M/K も可解拡大である．

証明　H を群 G の部分群とする． G がアーベル群ならば，H はアーベル群かつ G の正規部分群であって，剰余群 G/H もアーベル群である． このことと前定理から (1) が得られる． また，アーベル群を巡回群としても同様のことがいえるから (2) も成り立つ．(3) は，G が可解群のとき H も可解群であり，さらに H が G の正規部分群ならば剰余群 G/H も可解群になることから導かれる． □

定理 11.5　体の拡大 Ω/K の中間体 $M_1,\ M_2$ がともに K 上の有限次ガロア拡大体であるとする．

(1) M_1M_2 および $M_1 \cap M_2$ はともに K 上ガロアである．

(2) $\mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ は直積 $\mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$ の部分群に同型である．

(3) $M_1 \cap M_2 = K$ ならば，自然な同型

$$\mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \cong \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$$

が存在する．

証明　(1) は，定理 8.13 から分離性が，定理 9.14 から正規性が導かれることからわかる．(2) と (3) を示すために，準同型写像

$$\Gamma : \mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{M_1}, \sigma|_{M_2})$$

を考える． いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Gamma$ ならば，$\sigma|_{M_1} = \mathrm{id}_{M_1}$，$\sigma|_{M_2} = \mathrm{id}_{M_2}$ だから，$\sigma|_{M_1M_2} = \mathrm{id}_{M_1M_2}$，したがって $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{\mathrm{id}_{M_1M_2}\} = \{1\}$，すなわち Γ は単射であり (2) が得られた． 次に，$G = \mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ とおき，$M_1,\ M_2$ に対応する G の部分群を $H_1,\ H_2$ とする． $M_1,\ M_2$ は K 上ガロアだから，定理 11.3 より，$H_1,\ H_2$ は G の正規部分群で，自然な同型

$$\mathrm{Gal}(M_1/K) \cong G/H_1, \qquad \mathrm{Gal}(M_2/K) \cong G/H_2$$

が得られる． したがって，上で定義した単射準同型写像 Γ は

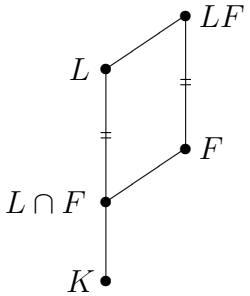
$$\Gamma : G \longrightarrow G/H_1 \times G/H_2$$

と書き換えることができる． ここで，$H_1,\ H_2$ の正規性から，$H_1 \cup H_2$ で生成される群は

$$H_1H_2 = \{\, h_1h_2 \,|\, h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2 \,\}$$

と一致する．一方，定理 11.1 (2) より，$H_1 \cap H_2$ は M_1M_2 に対応するから単位群である; $H_1 \cap H_2 = \{1\}$．よって，H_1H_2 は直積群 $H_1 \times H_2$ と同型であり，さらに $M_1 \cap M_2$ に対応していることが定理 11.1 (3) からわかる．そこで，とくに $M_1 \cap M_2 = K$ の場合を考えると，$G = H_1H_2 \cong H_1 \times H_2$ であって，G の位数と $G/H_1 \times G/H_2$ の位数は等しくなる．したがって，Γ は同型写像であり (3) が確かめられた． □

定理 11.6　L/K が有限次ガロア拡大ならば，K 上の任意の拡大体 F に対して，LF/F はガロア拡大であり，そのガロア群は $\mathrm{Gal}(L/(L \cap F))$ と同型である．とくに $\mathrm{Gal}(LF/F)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群と同型である．



証明　L/K は分離拡大なので，L の任意の元は K 上分離的だから，F 上でも分離的，したがって命題 8.10 等を用いれば，LF/F は分離拡大である．一方，定理 9.15 より LF は F 上正規でもあるから，LF/F はガロア拡大である．定理の後半を示すために，$M = L \cap F$ とおき，準備として

$$[L : M] = [LF : F]$$

が成り立つことを確かめよう．L/K は有限次分離拡大だから，原始元定理（定理 8.7）より，$L = K(\alpha)$ となるような $\alpha \in L$ がとれる．$f(X)$ を α の K 上の最小多項式，$g(X)$ を α の F 上の最小多項式とする．$f(X) \in F[X]$ と考えれば，$f(X)$ は $g(X)$ で割り切れることがわかるから，$B \subset \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ が存在して，

$$g(X) = \prod_{\beta \in B} (X - \beta)$$

と書くことができる．ここで，L/K は正規であるから $B \subset \mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$，したがって，$g(X)$ の係数は $L \cap F = M$ に属する; $g(X) \in M[X]$．あきらかに $g(X)$ は M 上でも既約だから，$g(X)$ は α の M 上の最小多項式となる．よって，$L = M(\alpha)$, $LF = F(\alpha)$ に注意して

$$[L : M] = [M(\alpha) : M] = \deg g = [F(\alpha) : F] = [LF : F]$$

が得られた．さて，準同型写像

$$\Delta : \mathrm{Gal}(LF/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/M), \quad \sigma \mapsto \sigma|_L$$

を考える（$M \subset F$ なので定義可能）．いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ とすると $\sigma|_L = \mathrm{id}_L$ だが，もともと σ は F 上の写像なので $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$，したがって $\sigma = \mathrm{id}_{LF}$ であり，$\mathrm{Ker}\,\Delta = \{\mathrm{id}_{LF}\} = \{1\}$，よって Δ は単射である．さらに，定理 10.3 と上で示した $[LF : F] = [L : M]$ から，$\mathrm{Gal}(LF/F)$ と $\mathrm{Gal}(L/M)$ の位数は等しいので，Δ は同型写像であることが導かれる．□