§1.　2次, 3次, 4次方程式の解の公式

定理 1.1　2次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は，$b^2 - 4c$ の平方根をひとつ固定し，それを R とするとき，

$$\frac{-b+R}{2}, \qquad \frac{-b-R}{2}$$

で与えられる．

証明　解を α, β とすれば，解と係数の関係から，$\alpha + \beta = -b$,　$\alpha\beta = c$.　よって，

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$$

そこで，この平方根のひとつを R とし，α, β に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha - \beta = R \end{cases}$$

を解けばよい．　□

定理 1.2　3次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は，Y に関する2次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の2解それぞれの3乗根 R, S を，$RS = b^2 - 3c$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega^2 R+\omega S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega R+\omega^2 S}{3}$$

で与えられる．　ここで，ω は1の原始3乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

である．

証明　3つの解を α, β, γ とし，

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma, \\ R &= \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \\ S &= \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \end{aligned}$$

とおく． Q, R, S が求まれば，上の式を α, β, γ に関する連立方程式とみなして解けばよい． さて，解と係数の関係から $Q = -b$ だが,

$$R^3 + S^3 = -2b^3 + 9bc - 27d, \qquad RS = b^2 - 3c$$

も，ちょっとがんばればわかる． したがって，R^3, S^3 は定理にある Y に関する2次方程式の解である． R, S は，これらの3乗根として求まり，定理の主張が導かれる． □

定理 1.3　4次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は，Y に関する3次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (b^3 - 4bc + 8d)^2 = 0$$

の3解それぞれの平方根 R, S, T を，$RST = -b^3 + 4bc - 8d$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b + R + S + T}{4}, \quad \frac{-b + R - S - T}{4}, \quad \frac{-b - R + S - T}{4}, \quad \frac{-b - R - S + T}{4}$$

で与えられる．

証明　$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を4つの解として

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ R &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ S &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ T &= \alpha - \beta - \gamma + \delta \end{aligned}$$

とおく． Q, R, S, T が求まれば，上の式を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関する連立方程式とみなして解けばよい． 解と係数の関係から $Q = -b$ だが,

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 + T^2 &= 3b^2 - 8c, \\ R^2S^2 + S^2T^2 + T^2R^2 &= 3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e, \\ RST &= -b^3 + 4bc - 8d \end{aligned}$$

も，うんとがんばって計算すれば得られる． したがって，R^2, S^2, T^2 は定理にある Y に関する3次方程式の解である． R, S, T は，これらの平方根として求まり，定理の主張が導かれる． □

定義 1.4　n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つとき，**対称式**であるという（正確には $x_1, \ldots, x_n$ の対称式という）.

定義 1.5　n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n$$

によって定まる $s_1, \ldots, s_n$ を，$x_1, \ldots, x_n$ の**基本対称式**という．とくに，s_j を j 次の基本対称式という.

例 1.6　基本対称式は対称式である.

$n = 2$ のとき　$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1 x_2 \end{cases}$

$n = 3$ のとき　$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$

$n = 4$ のとき　$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ s_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases}$

例 1.7　x_1, x_2, x_3 の対称式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3$$

は，上に定めた $n = 3$ のときの基本対称式 s_1, s_2, s_3 によって

$$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 - 3s_2$$

と表すことができる.

定理 1.8 (対称式の基本定理) $x_1,\ldots,x_n$ の任意の対称式 $f(x_1,\ldots,x_n)$ に対して，ある n 変数多項式 $G(X_1,\ldots,X_n)$ が存在して，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=G(s_1,\ldots,s_n)$$

が成り立つ． すなわち，任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる．

例 1.9 証明は，難しいことは使わないが煩雑なので省略する． 以下に例を挙げて証明の代わりとする．

(1) $f(x,y)=x^4+y^4$ を x,y の基本対対称式

$$s=x+y,\quad t=xy$$

の多項式として表す.

$$\begin{aligned} f(x,y)&=x^4+y^4\\ f(x,y)-s^4&=-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3\\ f(x,y)-s^4+4s^2t&=2x^2y^2\\ f(x,y)-s^4+4s^2t-2t^2&=0 \end{aligned}$$

よって，$f(x,y)=s^4-4s^2t+2t^2$.

(2) $g(x,y,z)=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$ を x,y,z の基本対称式

$$s=x+y+z,\quad t=xy+yz+zx,\quad u=xyz$$

の多項式で表す.

$$\begin{aligned} g(x,y,z)&=x^3y+x^3z+xy^3+xz^3+y^3z+z^3y\\ g(x,y,z)-s^2t&=-2x^2y^2-5x^2yz-2x^2z^2-5xy^2z-5xyz^2-2y^2z^2\\ g(x,y,z)-s^2t+2t^2&=-x^2yz-xy^2z-xyz^2\\ g(x,y,z)-s^2t+2t^2+su&=0 \end{aligned}$$

ゆえ，$g(x,y,z)=s^2t-2t^2-su$.