§4. 代数拡大

定義 4.1 L/K を体の拡大とする．L の任意の元が K 上代数的であるとき，L は K 上**代数的**であるという．また，L/K を**代数拡大**という．L が K 上代数的でないとき，L は K 上**超越的**であるといい，L/K を**超越拡大**という．

命題 4.2 有限次拡大は代数拡大である．

証明 L/K を有限次拡大とする．いま，$\alpha \in L$ を任意にとると，$K(\alpha)$ は L/K の中間体だから，定理 2.9 より $K(\alpha)/K$ も有限次拡大である．よって定理 3.7 によって，α は K 上代数的である．すなわち L の任意の元が K 上代数的あることが示されたから，L/K は代数拡大である． □

命題 4.3 体の拡大 L/K に対して次は同値である．

(i) L/K は有限次拡大である．

(ii) K 上代数的な有限個の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ が存在して，$L = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が成り立つ．

証明 (i) のとき，ベクトル空間としての L の K 上の基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をとれば，前命題よりこれらはすべて K 上代数的であり，(ii) が導かれる．逆に，(ii) のときは，

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \ldots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$

とおけば，各 $i = 1, \ldots, n$ について，α_i は K_{i-1} 上代数的だから，定理 3.7 より K_i/K_{i-1} は有限次，したがって，定理 2.9 から，$L = K_n$ は K 上有限次であることが導かれ，(i) を得る． □

定理 4.4 M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，次は同値である．

(i) L/K は代数拡大である．

(ii) L/M, M/K はともに代数拡大である．

証明 (i) ならば (ii) が成り立つのはあきらかなので，以下，(ii) を仮定して (i) を導く．そのためには，任意の $\alpha \in L$ が K 上代数的であることを確かめればよい．(ii) より L/M は代数的だから，α は M 上代数的，したがって，α を根とする M 上の零でない多項式

$$g(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \qquad (c_i \in M)$$

が存在する．いま，$M_0 = K(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ とおくと，α は M_0 上代数的であるから，定理 3.7 より $M_0(\alpha)/M_0$ は有限次である．一方，仮定 (ii) より M/K も代数的なので c_i は K 上代数的，よって，前命題より M_0/K は有限次である．したがって，定理 2.9 から，$M_0(\alpha)/K$ は有限次拡大であり，さらに命題 4.2 から代数拡大でもある．とくに α は K 上代数的である． □

例 4.5 自然数 n に対して，$X^n - 1 = 0$ の根である複素数全体を W_n とする;

$$W_n = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid z^n = 1 \,\}.$$

いま，

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

とおけば，$W_n = \{\, \zeta_n^j \,|\, j = 0, 1, \ldots, n-1 \}$ と具体的にかけ，これが $X^n - 1$ の根全体の集合と一致する．よって，命題 4.3 より $\boldsymbol{Q}(W_n)/\boldsymbol{Q}$ は有限次，したがって，命題 4.2 より代数拡大である（実際には，$\boldsymbol{Q}(W_n) = \boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ が成り立っているので，命題 4.3 は必要とせず，定理 3.7 を使えばよい）．とくに n が素数 p の場合，ζ_p は $X^p - 1$ の既約因子 $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ の根だから，定理 3.8 より，

$$[\boldsymbol{Q}(W_p) : \boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{Q}(\zeta_p) : \boldsymbol{Q}] = p - 1.$$

この等式は，任意の自然数 n に対して，オイラー関数 φ を用いた等式

$$[\boldsymbol{Q}(W_n) : \boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{Q}(\zeta_n) : \boldsymbol{Q}] = \varphi(n)$$

に拡張されるが，証明は少し難しい．

補題 4.6 L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とすると，$K(A)$ は A の有限部分集合 B のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_B K(B)$$

と表される．すなわち，任意の $\alpha \in K(A)$ に対して，$\alpha \in K(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \cdots, \beta_n \in A$ がとれる．

証明　$M = \bigcup_B K(B)$ とおく．このとき，$M \subset K(A)$ は直ちにわかる．一方，あきらかに $K \subset M$ であり，また $A \subset M$ もすぐにわかるから，M が体であれば $K(A) \subset M$，したがって補題を得る．以下，M が体であることを確かめる．M の任意の元 $\beta, \gamma \neq 0$ に対して，$\beta \in K(B)$，$\gamma \in K(C)$ をみたす A の有限部分集合 B, C がとれる．$D = B \cup C$ とおけば，D も A の有限部分集合であって $\beta, \gamma \in K(D)$ であるが，$K(D)$ は体なので，β, γ の和，差，積，商は $K(D)$ に属する．さらに $K(D) \subset M$ なので，これらは M に属する．よって，M は体である．□

定理 4.7　L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とする．A の任意の元が K 上代数的ならば $K(A)/K$ は代数拡大である．

証明　任意の $\alpha \in K(A)$ に対して，前補題から，$\alpha \in K(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ をみたす $\beta_i \in A$ がとれる．仮定より β_i は K 上代数的だから，拡大 $K(\beta_1, \cdots, \beta_n)/K$ は，命題 4.3 より有限次，よって命題 4.2 より代数的，とくに α は K 上代数的である．□

系 4.8　L/K を体の拡大とする．$\alpha, \beta \in L$ $(\beta \neq 0)$ がともに K 上代数的ならば，それらの和と差 $\alpha \pm \beta$，積 $\alpha\beta$，商 α/β はどれも K 上代数的である．

証明　前定理より $K(\alpha, \beta)$ は K 上代数的であり，$\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha, \beta)$ だから結論を得る．□

例 4.9　複素数平面における単位円を S とする．また，ある自然数 n に対して，$z^n = 1$ をみたす複素数全体を W で表す．

$$S = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1 \,\} = \left\{\, x + iy \in \boldsymbol{C} \mid x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 = 1 \,\right\},$$
$$W = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid \exists n \in \boldsymbol{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

すべての $n \in \boldsymbol{N}$ について，$\boldsymbol{Q}(W_n) \subset \boldsymbol{Q}(W) \subset \boldsymbol{Q}(S)$．ここで，以下が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{Q}(W)/\boldsymbol{Q}$ は有限次ではない代数拡大である．

(2) $\boldsymbol{Q}(S)/\boldsymbol{Q}$ は超越拡大である．

(1) は，定理 4.7 および例 4.5 から容易に証明できる．(2) の証明法はいくつかあるが，どれも簡単ではない．

命題 4.10 L/K を体の拡大とし，M をその中間体とする．$\alpha \in L$ が K 上代数的であるとき，

$$[M(\alpha):M] \leq [K(\alpha):K]$$

が成り立つ．

証明 α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，$\deg f = [K(\alpha):K]$．一方，$f(X)$ は M 上の多項式でもあるから，補題 3.5 より，$[M(\alpha):M] \leq \deg f$ であり，求める不等式を得る． □

例 4.11 $X^3 - 1$ の 1 でない根のひとつを ω とする（1 の原始 3 乗根）．このとき，ω, ω^2 は $X^2 + X + 1$ の 2 根である．$X^3 - 2$ の実根を α とすれば，他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ で与えられる．$X^3 - 2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約だから，定理 3.8 より $\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ は 3 次拡大である．このとき，

(a) $M = \boldsymbol{Q}(\omega)$ とおけば，$[M(\alpha):M] = 3 = [\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]$,

(b) $L = \boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$ とおけば，$[L(\alpha):L] = 2 < 3 = [\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]$

が成り立ち，それぞれ，前命題において，等号が成り立つ例，成り立たない例となっている．

定義 4.12 Ω/K を体の拡大とし，L, M をその中間体とするとき，L, M をともに含む Ω の最小の部分体を L, M の**合成体**といい LM で表す．すなわち，$LM = L(M) = M(L)$ である．

定理 4.13 L, M が体の拡大 Ω/K の中間体で，L/K が有限次拡大ならば

$$[LM:M] \leq [L:K]$$

が成り立つ．

証明 命題 4.3 より，$L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ をみたす K 上代数的な元 α_i がとれる．

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \ldots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$
$$M_0 = M, \quad M_1 = M_0(\alpha_1), \quad M_2 = M_1(\alpha_2), \quad \ldots, \quad M_n = M_{n-1}(\alpha_n)$$

とおくと，命題 4.10 より $[M_i : M_{i-1}] \leq [K_i : K_{i-1}]$．さらに，$L = K_n$ かつ $LM = M_n$ だから，定理 2.9 を何度か適用して

$$[LM:M] = [M_n:M_{n-1}] \cdots [M_1:M_0] \leq [K_n:K_{n-1}] \cdots [K_1:K_0] = [L:K]$$

が導かれる． □